

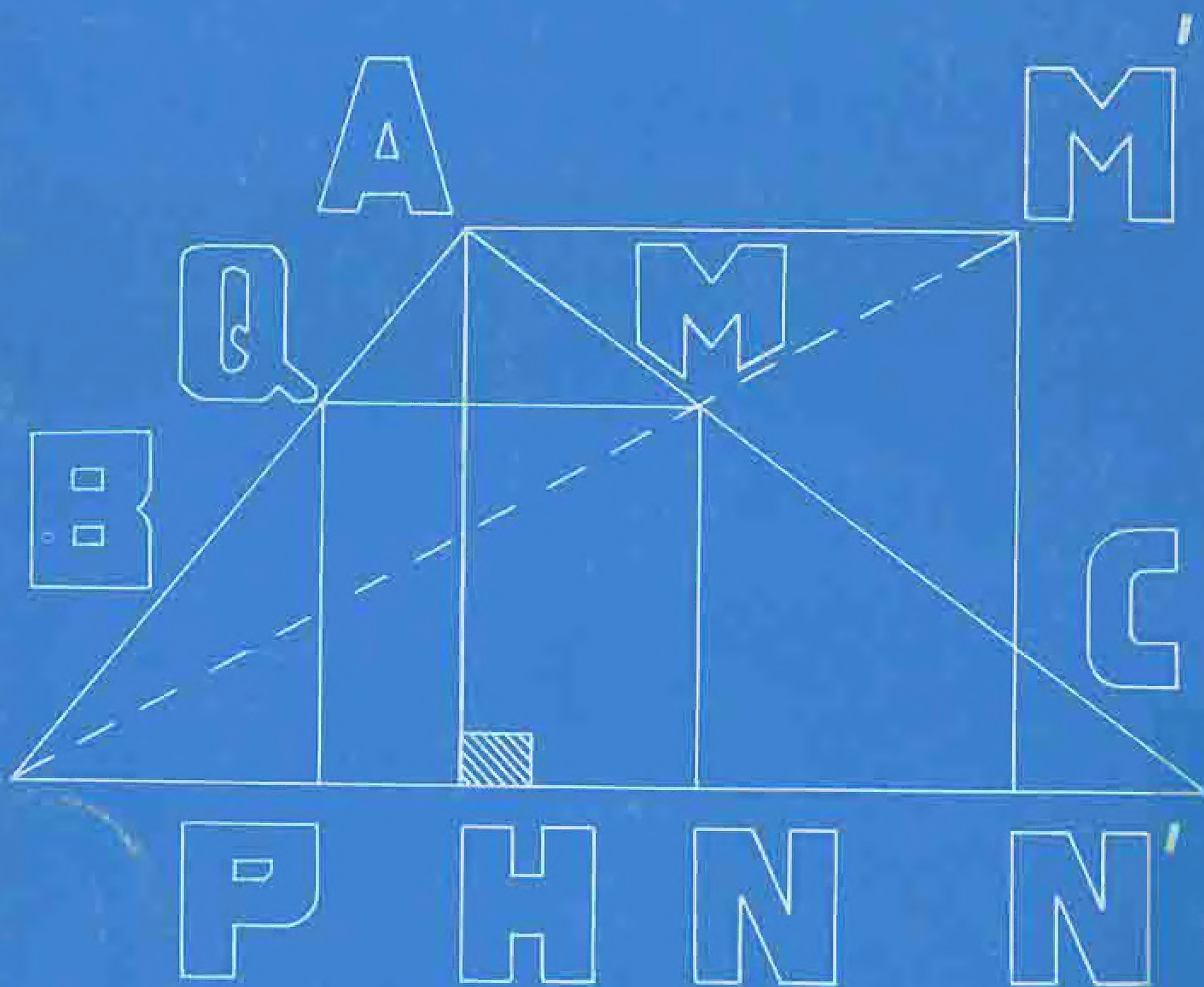
هندسه

سال سوم

آموزش متوسطه عمومی

ریاضی و فیزیک

۲۶۴



بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه

سال سوم

آموزش متوسطهٔ عمومی

ریاضی و فیزیک

۱۳۶۰



پدیدآورندگان

مؤلفان ◀ ● احمد بیرشک ● محمدطاهر معیری
صفحه پرداز ◀ فاطمه سقانژاد تهرانی
چاپ از ◀ چاپخانهٔ ندا

بسمه تعالی

ملت قهرمان ایران با پیروی کامل از امام امت و فریاد اللهاکبر و خون شهیدان نظام پلید شاهنشاهی را در گورستان تاریخ دفن‌کرد . دژخیمان و جلادان را به آتش خشم الهی گرفتار ساخت و با شرکت فعال خودّ در همه‌پرسی‌ها ، نظام جمهوری اسلامی و قانون اساسی را استقرار بخشید و رئیس‌جمهور و نمایندگان مجلس شورای اسلامی را انتخاب کرد .

پس از آن با مبارزه‌ای بزرگتر برای نخستین‌باردرپیشاپیش مستضعفان جهان ، شیطان بزرگ را به ذلت و التماس کشانید .

اکنون پس از طی این مراحل معجزه‌آسا ، برای تحکیم بنیان عظیم انقلاب اسلامی و تضمین تداوم و گسترش آن و مصونیتش در برابر هر توطئه‌ای ، زمان آن فرا رسیده است که این ملت بزرگ اساسی‌ترین مرحله ، یعنی انقلاب فرهنگی را قاطعانه بانجام رساند . باید ته‌مانده فرهنگ منحط شاهنشاهی و آموزشهای استعماری ، از تمام ارکان جامعه ، مدرسه ، دانشگاه ، ادارات و کوچه و بازارو...... زدوده شود .

انقلاب فرهنگی در اسلام منشاء دگرگونیهای اجتماعی و اساس انقلاب سیاسی و اقتصادی جامعه است‌و اینک ما در این برهه از زمان و در این مقطع حساس ، عهده‌دار امر بسیار خطیر و مهمی هستیم و باید با تشخیص صحیح و روشن‌بینی ، مسیر آموزش وپرورش نسل جدید را مشخص سازیم و این فرهنگ آشفته و ویران را بازسازی کنیم و بدنبال انقلاب اجتماعی و سیاسی ،در تداوم انقلاب فرهنگی نیز به‌پیروزی نائل آئیم . بازیافتن و ارائه فرهنگ اصیل اسلامی بر عهده همه علاقمندان به فرهنگ است . باید ملاکهای بیگانه و غیر اصیل را شناسائی کرد و آنها را از آموزش و پرورش کنار گذاشت . این تغییر بنیادی در فرهنگ و در نظام آموزشی،چنان نیست که بصورت فرمان از مراکز اجرائی صادر شود . این خود مردم هستند که باید بفکر آینده خود باشند و تمام علاقمندان به فرهنگ این وظیفه خطیر را بعهده دارند . دستگاه اجرائی امروز از بطن مردم است و بین این دو جدائی نیست .

در سال جاری با توجه به فرصت محدود ، برخی از کتابها بازسازی شد و برخی دیگر نیز با اصلاحات آماده گردید . در این امر از پیشنهادها و راهنمائی‌های کتبی و شفاهی بسیاری از برادران و خواهران صاحبنظر ، خصوصا" همکاران فرهنگی استفاده کردیم بامید آنکه در سال جدید با کمک همه اقشار مردم به‌پا خاسته ایران ، شاهد تغییر بنیادی نظام آموزشی دردرون یک انقلاب اصیل فرهنگی باشیم تا تغییر و اصلاح اساسی ، بدانگونه که باید صورت گیرد و کتابهای‌درسی بر اساس‌آن نظام تدوین‌شود .

دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تاءلیف کتابهای‌درسی

فهرست

فصل اول ــ رابطه‌های طولی	۱
فصل دوم ــ بردار	۳۲
فصل سوم ــ تبدیلهای مهم هندسی	۴۲
فصل چهارم ــ شکلهای فضایی	۷۳

فصل اول

رابطه‌های طولی

۱.۱- رابطه‌های طولی در دایره

۱.۱.۱- تعریف ـ می‌دانید که بین اجزای خطی هرشکل هندسی رابطه‌هایی می‌توان یافت که به اندازه‌های آنها بستگی ندارند ، از آن جمله آن است که : درمثلث سه ارتفاع همرسند، در دایره قطر عموذ بریك وتر نیمساز زاویهٔ مرکزی مقابل به‌آن وتر است، و...

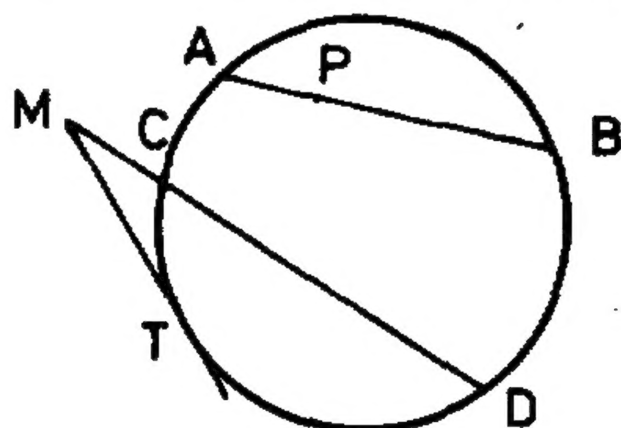
گاهی رابطهٔ بین اجزای خطی‌یك شکل‌برحسب اندازه‌ها است که با اعداد بیان می‌شوند. این‌گونه رابطه‌های بین اجزای خطی یك شکل هندسی را «رابطه‌های طولی» نامیده‌ایم ، یادآوری می‌کنیم که :

رابطه‌های طولی رابطه‌هایی هستند که بین اندازه‌های اجزای خطی‌یك شکل هندسی‌برقرار باشند .

در رابطه‌های طولی‌آنچه به عنوان یك‌پاره خط مطرح می‌شود، اندازهٔ آن پاره‌خط است و بنابراین یك عدد حقیقی است .

در این فصل همه شکلها در یك صفحه معین * قرار دارند.

۲.۱.۱- قطعات‌وتر دایره - هرگاه بروتری از یك دایـره ، یا بر امتداد آن ، نقطه‌ای مانند P (شکل ۱ـ۱) اختیار کنیـم ، پاره‌خطهای محدود بین‌نقطهٔ P و دوسر وتـر را دو قطعهٔ وتـر می‌نامیم . مانند قطعات PA و PB از وتـر AB و قطعات MC و MD ازقاطع MCD.



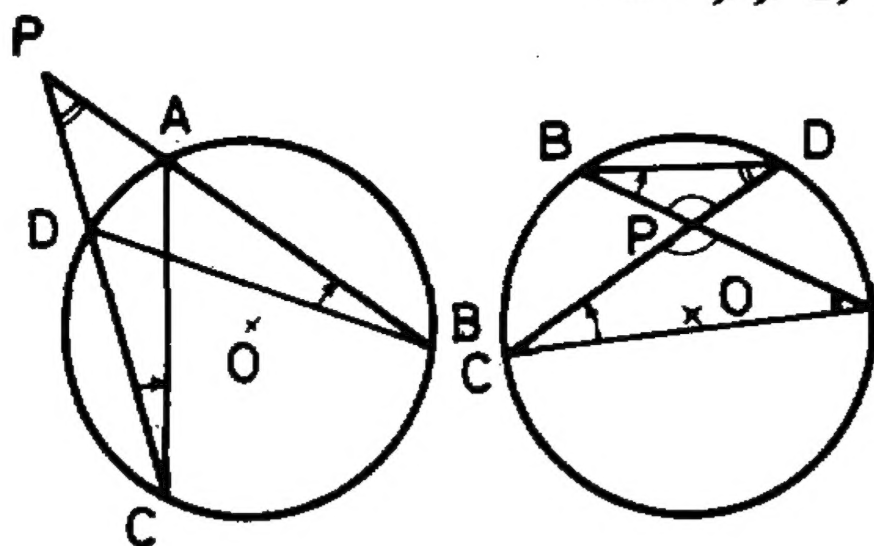
(شکل ۱-۱)

به‌همین ترتیب‌پاره خطی که از یك نقطهٔ M بـر دایـره‌ای در نقطهٔ T مماس شود ، به عنوان‌قطعهٔ مماس نامیده می‌شود ، مانند مماس MT .

بین اندازه‌های پاره خطهایی که از برخورد دو وتر ، یا دو قاطع ، یا مماس و قاطع در

دایره پدید می‌آیند رابطه‌هایی برقرارند که در این بخش آنها را بررسی می‌کنیم.

۳.۱.۱- قضیهٔ ۱- هرگاه دو وتر از یک دایره متقاطع باشند، حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ یکی با حاصل‌ضرب اندازه‌های دوقطعهٔ دیگری برابر است.



(شکل ۱-۲)

برهان ــ دو وتر AB و CD از دایرهٔ C(O,R) درنقطهٔ P متقاطعند، (شکل ۱-۲) . نقطه‌های A و C و همچنین نقاط B و D را با خطهای راست به‌هم می‌پیوندیم و ملاحظه می‌کنیم که در دو مثلث CPA و BPD :

$$(\angle P=\angle P \text{ و } \angle B=\angle C) \Longrightarrow (\triangle CPA \sim \triangle BPD)$$

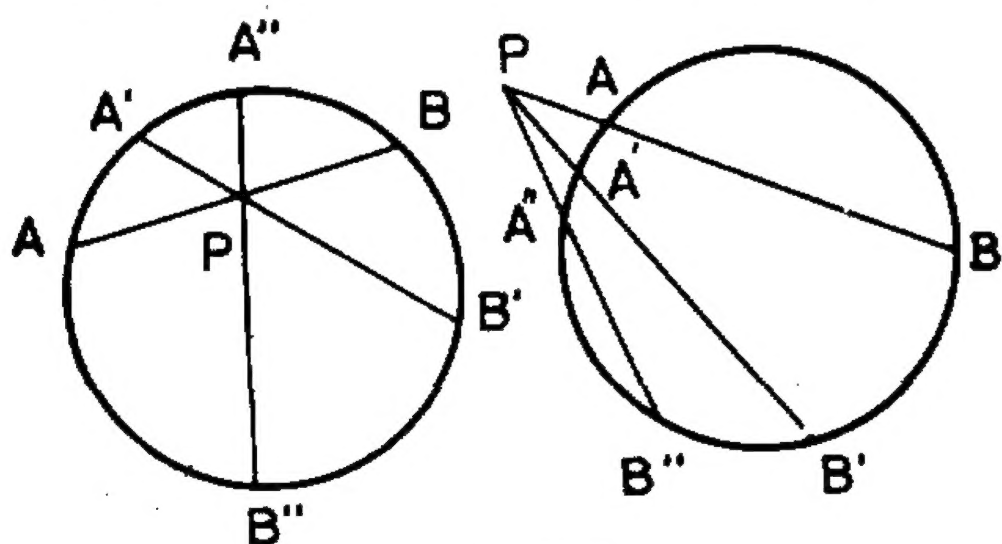
(چرا؟) و بنابراین :

$$\left(\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}\right) \Longrightarrow (PA\cdot PB=PC\cdot PD)$$

این قضیه را به‌صورت زیر نیز می‌توان بیان‌کرد:

هرگاه نقطه‌ای مانند P در درون یا در برون دایره‌ای درنظر بگیریم، حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ هر وتر یا قاطع دایره که بر آن نقطه بگذرد مقداری است ثابت.

به بیان دیگر: وقتی که خطی گرد نقطه‌ای چون P دوران کند و دایره‌ای چون C(O,R) را در دونقطهٔ A و B قطع کند، حاصل‌ضرب PA·PB همواره ثابت می‌ماند. یعنی در شکلهای ۱-۳.



شکل (۱-۳)

$$PA\cdot PB=PA'\cdot PB'=PA''\cdot PB''=\cdots$$

این رابطه نشان می‌دهد که حاصل ضرب اندازه‌های دوقطعهٔ و ترهای گذرنده بر هر نقطهٔ P درحقیقت به‌وضع آن نقطه نسبت به دایره بستگی دارد نه به‌امتداد خط شامل آن و به‌همین دلیل اگر نقطهٔ P ثابت باشد، هر چند امتداد وتر یا قاطع دایره تغییر کند، حاصل‌ضرب اندازه‌های دوقطعهٔ آن تغییر نمی‌کند.

ازاین مقدار ثابت بعدها درتعریف قوت نقطه نسبت به دایره استفاده می‌کنیم.

۴.۱.۱- قضیهٔ ۲- هرگاه ازنقطه‌ای مماس وقاطعی بر دایره رسم کنیم، مربع اندازهٔ مماس با حاصل ضرب اندازه‌های دوقطعهٔ قاطع برابر است.

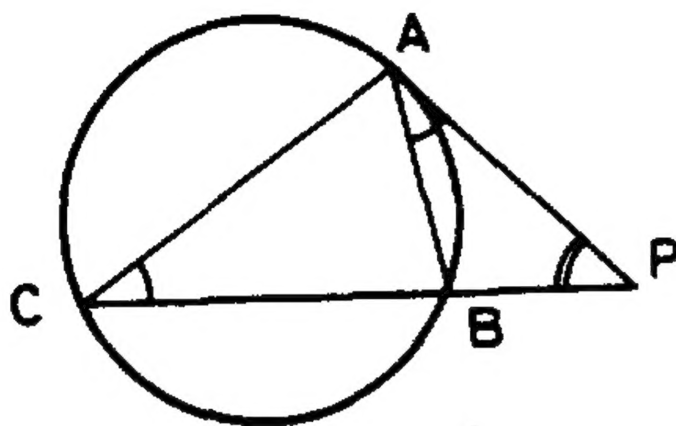
برهان- درشکل ۱-۴، $(\angle P=\angle P \text{ و } \angle A=\angle C) \Longrightarrow (\triangle PAC \sim \triangle PBA)$

و بنابراین :

$$\left(\frac{PA}{PC}=\frac{PB}{PA}\right) \Longrightarrow (PA^2=PB\cdot PC)$$

۵.۱.۱- واسطهٔ هندسی دو پاره خط -

واسطهٔ هندسی دو پاره خط، پاره خطی است که مربع اندازهٔ آن با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو پاره خط مزبور مساوی باشد.



(شکل ۱-۴)

دررابطهٔ فوق مربع اندازهٔ پاره‌خط PA با حاصل ضرب اندازه‌های دوپاره خط PB و PC مساوی است. از این روی گوییم پاره خط PA واسطهٔ هندسی بین دوپاره خط PB و PC است و قضیهٔ ۲ را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه- اگر از یك نقطه مماس و قاطعی بر دایره رسم شوند اندازهٔ مماس واسطهٔ هندسی است بین اندازه‌های دوقطعهٔ قاطع.

تمرین

۱- برصفحهٔ دایره‌ای به مرکز O و بشعاع ۱۳ سانتیمتر نقطه‌ای مانند P به فاصلهٔ ۵ سانتیمتر از مرکز دایره اختیار می‌کنیم، کوچکترین و بزرگترین وترهای دایره که ازنقطهٔ P می‌گذرند کدامند؟ اندازهٔ هریك را تعیین کنید. حاصل‌ضرب اندازه‌های دوپاره خطی‌را که نقطهٔ P برهریك ازاین دو وتر پدید می‌آورد حساب کنید.

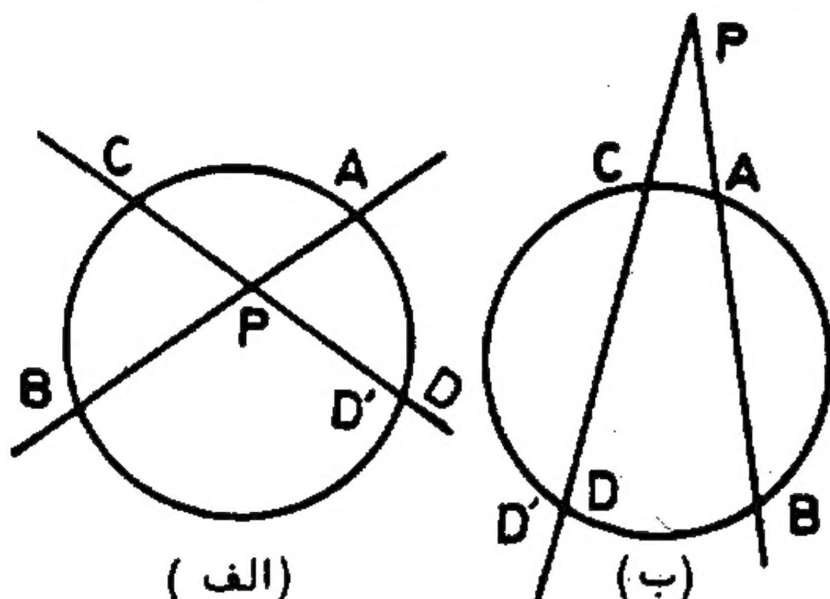
۲- دایره‌ای به‌قطر $AB=2R$ مفروض است، برامتداد این قطر ودرطرف‌نقطهٔ A نقطهٔ P را چنان اختیار می‌کنیم که اگر ازآن نقطه مماس PT را بر دایره رسم‌کنیم، داشته باشیم: $PT=2PA$؛ اندازه‌های پاره خطهای PT و PA و PB را برحسب R تعیین‌کنید.

۳- دایره‌های O و O' در دونقطهٔ A و B متقاطعند، ازنقطهٔ M واقع برامتداد AB دو مماس MP و MP' را بردودایره رسم کرده‌ایم. ثابت‌کنید $MP=MP'$ و ازآنجا نتیجه بگیرید که خط AB مماسهای مشترك دایره‌ها را نصف می‌کند.

قضیه های عکس

۶.۱۰۱- قضیه ۱- پنج نقطه متمایز P و A و B و C و D چنانند که نقطه P یا روی هردو پاره خط AB و CD است و یا در خارج هر دوپاره خط ولی برامتداد آنها می باشد. اگر $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ باشد آنگاه چهار نقطه A و B و C و D بریك دایره واقعند.

برهان ــ درشکلهای (۱–۵ الف و ب) برسه نقطه A و B و C که بریك خط راست نیستند یك دایره می گذرد خط PC بر دایره مماس نیست، زیرا درشکل (الف) امکان ندارد ودرشکل(ب) هم درصورت تماس، باید داشته باشیم:



(الف) (ب)

(شکل ۱–۵)

$PC^2 = PA \cdot PB$

که نتیجه می‌دهد $PC = PD$

واین خلاف فرض است. بنابراین خط PC دایره را درنقطه‌ای مانند D' متمایز از C قطع می کند و D' و D همواره دریك طرف P قراردارند.

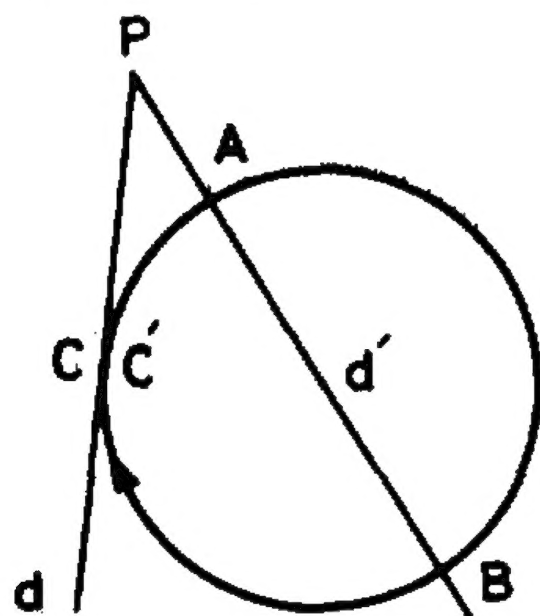
پس،

$PC \cdot PD' = PA \cdot PB$

ودر نتیجه $PD' = PD$ ؛ یعنی D' و D بریکدیگر منطبقند وبنابراین چهارنقطه A و B و C و D روی یك دایره هستند.

قضیه ۲ــ چهار نقطه متمایز P و A و B و C چنانند که P بر امتداد AB ولی در خارج آن است و $PC^2 = PA \cdot PB$. آنگاه دایره‌ای که برسه نقطه A و B و C می گذرد بر PC مماس است.

برهان ــ بدیهی است که P دزبرون دایره گذرنده برسه نقطه A و B و C می باشد. بنابراین اگر PC دایره را در نقطه دیگر C' نیز قطع کند داریم:



(شکل ۱–۶)

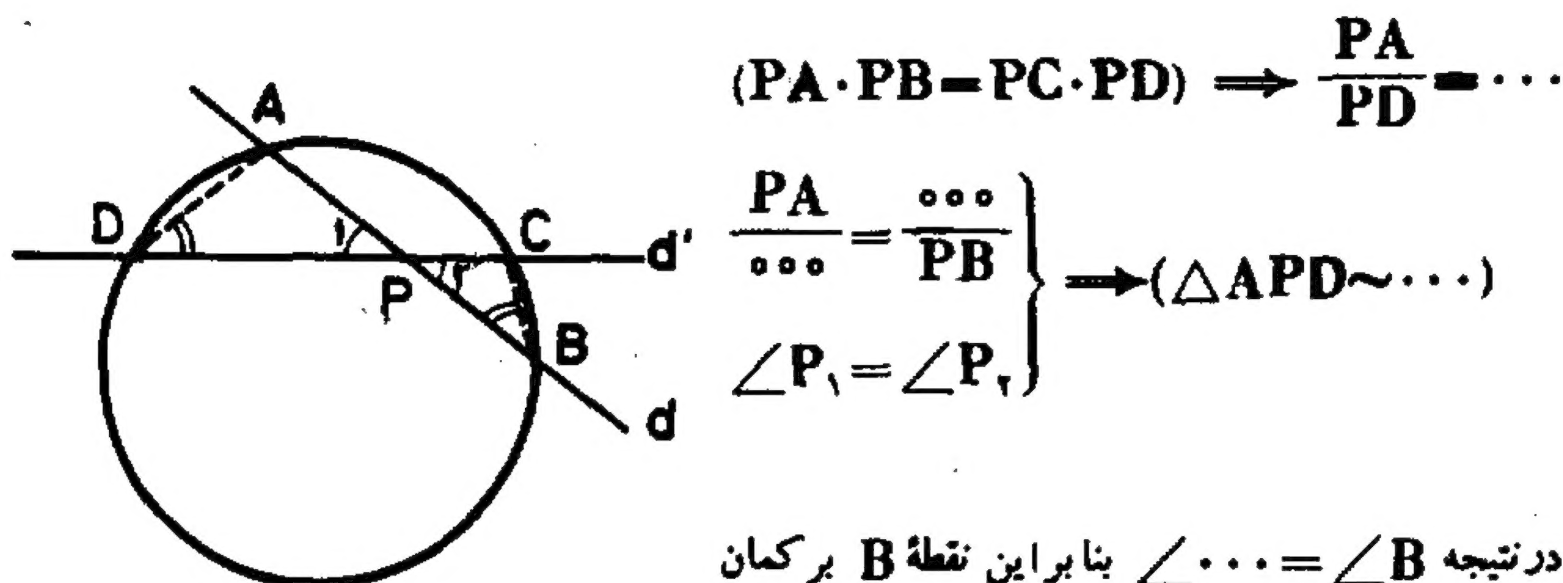
$PC \cdot PC' = PA \cdot PB$

ودرنتیجه : $PC = PC'$

یعنی C' بر C منطبق است. این نشان می‌دهد که PC بر دایره مماس است. (توجه کنید که C و C' دریك طرف P قرار دارند).

تمرین

۱ــ هریك ازعبارات زیرراچنان کامل کنیدکه باتوجه بهشکل ۱ــ۷ استدلال درست باشد.



$$(PA\cdot PB=PC\cdot PD) \Longrightarrow \frac{PA}{PD}=\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{PA}{\circ\circ\circ}=\frac{\circ\circ\circ}{PB}\\ \angle P_1=\angle P_2\end{array}\right\} \Longrightarrow (\triangle APD\sim\cdots)$$

(شکل ۱-۷)

درنتیجه $\angle B=\angle\cdots$ بنابراین نقطهٔ B برکمان حاوی زاویــهٔ ... وابسته به پاره خط AC واقع است. یعنی دایره‌ای که بــر نقاط A و C و ... می گذرد نقطهٔ ... را نیزشامل است. پس می توان گفت:

قضیه : ...

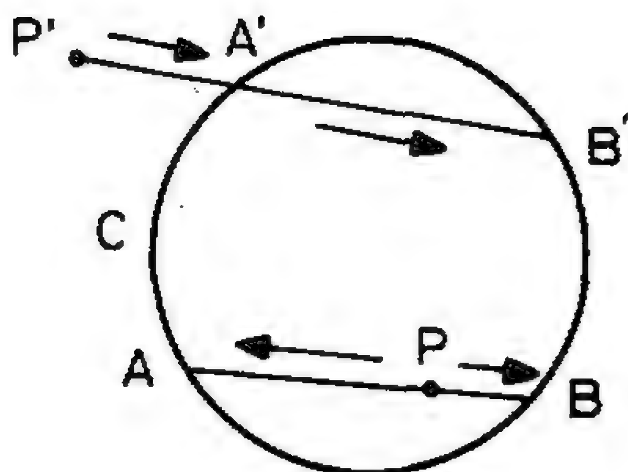
۲ــ قضیهٔ ۲ را بااین روش ثابت کنید.

۳ــ نقطهٔ P را دربرون دایرهٔ $C(O,R)$ درنظر گــرفته و ازآن نقطه خطی رسم کنید کــه دایره را درنقاط A و B قطع کند و $PA=AB$ باشد.آیا مسئله همیشه جواب دارد؟ مجموعهٔ نقاط P راچنان تعیین کنیدکه مسئله‌جواب داشته‌باشد. اگر $R=۸/۵$سانتیمترو$OP=۱۶/۵$ سانتیمترباشد، اندازهٔ وتر AB را تعیین کنید.

۴ــ دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ P دربرون‌آن مفروضند. می‌دانیم که فاصله‌هــای نزدیکترین و دورترین نقاط دایره به‌نقطهٔ P به ترتیب ۶ و ۱۸ سانتیمترند، انــدازهٔ شعاع دایره و اندازهٔ مماسی راکه ازنقطهٔ P بردایره رسم می‌شود تعیین کنید.

۱.۲.۱ــ قوت نقطه نسبت به دایرهــ در بخش قبل ثابت شد که اگــر نقطه‌ای مــانند P درصفحهٔ یك دایره درنظر بگیریــم و خطی غیر مشخص از این نقطه بگذرد و دایرهٔ را در دو نقطه مانند A و B قطع کند، حاصل ضرب دوقطعهٔ قاطع مقداری است ثابت و به وضع قاطع بستگی ندارد (شکل۱ــ۸) . یعنی اگرقاطع مزبور گردنقطهٔ P بگردد، حاصل‌ضرب‌اندازه‌های دوقطعه واقع برآن تغییر نمی کند و درهرحال یك‌عدد است، و می‌نویسیم:

$PA\cdot PB=$ مقدار ثابت



(شکل ۱-۸)

حال نقطهٔ P را آغاز و نقاط تقاطع دایره را با خطی که از آن نقطه می‌گذرد به‌ترتیب پایانهای دوقطعهٔ قاطع در نظر می‌گیریم، یعنی اندازه‌های دوقطعهٔ قاطع را با توجه به‌جهت آنها مورد توجه قرار می‌دهیم ، در این صورت ، $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ ، «قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ C» نامیده می‌شود و آن را با نماد $\mathcal{P}_c^p$ نمایش می‌دهیم

چنان‌که ذکر شد، قوت هر نقطهٔ مفروض P نسبت به دایرهٔ C مقداری است ثابت، و عددی است که ممکن است مثبت یا منفی یا مساوی صفر باشد. زیرا اگر نقطهٔ P در بیرون دایرهٔ C اختیار شود، دونقطهٔ تقاطع دایره با هرخط که از آن‌نقطه بگذرد در یك طرف نقطهٔ P واقع می‌شوند(چرا؟)، و اگر نقطهٔ P آغاز قطعات قاطع اختیار شود، دو قطعهٔ قاطع نسبت به این آغاز پاره‌خطهایی هم جهت خواهند بود و بنابراین اندازه‌های جبری آنها اعداد هم نشانه‌اند، (هردومثبت یا هردو منفی) در نتیجه $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ عددی است مثبت.

به‌همین‌ترتیب می‌توان ملاحظه کرد که اگر نقطهٔ P در درون دایره باشد، $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ عددی است منفی.

در حالتی‌که نقطهٔ P بردایره واقع باشد، اندازهٔ یکی از قطعات قاطع، (یا اندازهٔ هر دو آنها) صفر، و در نتیجه قوت آن نقطه نسبت به دایره صفر است.

بنابراین درحالت کلی می‌گوییم:

قوت هرنقطهٔ P از صفحهٔ یك‌دایره نسبت بـه آن دایره حاصل‌ضرب اندازه‌های جبری دوقطعهٔ هرقاطعی است که برآن نقطه بگذرد. قوت نقطه نسبت به‌دایره، به وضع قاطع بستگی ندارد و تابع وضع‌نقطه نسبت‌به دایره است.

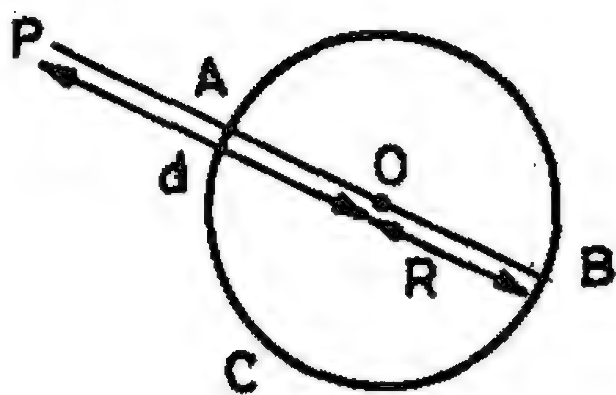
قوت هرنقطهٔ واقع برصفحهٔ یك‌دایره نسبت به‌آن دایره، برحسب آن که نقطه در بیرون دایره یا در درون آن یا بردایره واقع باشد، عددی مثبت یا منفی یا مساوی صفر است. یعنی اگر دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ P واقع برصفحهٔ آن دایره را در نظر بگیریم و $\mathcal{P}_c^p$ قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ C باشد:

$$OP>R\Longrightarrow\mathcal{P}_c^p>0$$

$$OP=R\Longrightarrow\mathcal{P}_c^p=0$$

$$OP < R \Rightarrow \varphi_c^p < 0$$

۲.۲.۱ - محاسبهٔ قوت نقطه نسبت به‌دایره - گفتیم که قوت هر نقطه از صفحهٔ یك دایره نسبت به آن دایره به وضع قاطع گذرنده از آن نقطه بستگی ندارد و مقدار ثابتی است. یعنی وقتی قاطع تغییر می‌کند و گرد نقطهٔ P می‌گردد، اندازه‌های دوقطعهٔ آن تغییر می‌کنند اما تغییر آنها به صورتی‌است که حاصل ضرب آنها تغییر نمی‌کند. اما اگر نقطهٔ P درصفحه جا به‌جا شود، این مقدار ثابت نخواهد ماند و به‌همین علت گفتیم که قوت هر نقطه نسبت به دایرهٔ مفروض با جا وموقعیت آن نقطه نسبت به دایره بستگی دارد و هرنقطه نسبت به دایرهٔ مفروض قوت معین دارد.



(شکل ۱-۹)

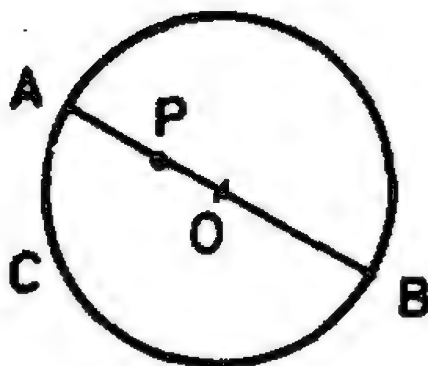
فرض‌می‌کنیم فاصلهٔ نقطهٔ P از مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ مساوی d باشد $(PO=OP=d)$ در این صورت اگر قاطعی را که ازمرکز دایره می‌گذرد و دایره را در A و B قطع می‌کند وسیلهٔ محاسبهٔ قوت نقطه P نسبت به دایره‌قرار دهیم، به موجب تعریف:

$$\varphi_c^p = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

ولی‌می‌دانیم که: $\overline{PA} = \overline{OA} - \overline{OP}$ و $\overline{PB} = \overline{OB} - \overline{OP} = -\overline{OA} - \overline{OP}$

$$\overline{PA} - \overline{PB} = (\overline{OA} - \overline{OP})(-\overline{OA} - \overline{OP}) = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2 = d^2 - R^2$$

$$\boxed{\overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - R^2}$$



(شکل ۱-۱۰)

درصورتی که نقطهٔ P بردایره واقع باشد، قوت‌آن نسبت به دایره صفر است و در این حالت $d=R$ و بنابراین می‌توان نوشت:

$$\varphi_c^p = 0 = d^2 - R^2$$

پس به‌طور کلی:

قوت هرنقطه نسبت به یك‌دایره به شعاع R که فاصلهٔ آن از مرکز دایره مساوی d باشد مساوی $d^2 - R^2$ است. یعنی:

$$\varphi_c^p = d^2 - R^2 \qquad (d = OP)$$

این دستور کلی تأیید می کند که :

قوت هرنقطه نسبت به یک‌دایره برحسب آن که‌آن نقطه دربرون یا در درون یا روی آن دایره باشد، عددی مثبت یا منفی یا مساوی صفراست (چرا؟) .

مثال - دایرهٔ $C(O,6)$ و نقاط P و M را درصفحهٔ آنچنان اختیارمی کنیم که $PO=8$ و $MO=4$ باشد. در این‌صورت:

$$\varphi_C^P=PO^2-R^2=64-36=28$$ و

$$\varphi_C^M=MO^2-R^2=16-36=-20$$

و اگر $N\in C$ فرض شود :

$$\varphi_C^N=NO^2-R^2=36-36=0$$

تمرین

۱- هریک از عبارات زیر را چنان کامل کنید که یک گزارهٔ درست حاصل شود.

- قوت هرنقطهٔ واقع برصفحهٔ یک دایره نسبت به‌آن دایره با یک... بیان می‌شود.

- قوت هر نقطهٔ واقع برصفحهٔ یک دایره نسبت به آن دایره درصورتی که‌آن نقطه در برون دایره باشد، عددی است ...

- اگر قوت یک نقطه نسبت به دایره‌ای مساوی صفر باشد، آن نقطه...

- قوت یک نقطهٔ واقع برصفحهٔ یک دایره به شعاع ۴ نسبت به آن دایره ۱۶ — است ، آن نقطه... واقع است.

۲- قوت مرکز یک دایره را نسبت به آن دایره حساب کنید.

۳- مکان هندسی نقاطی از صفحهٔ یک دایره راکه نسبت‌به آن دایره به یک‌قوت مفروض می باشند تعیین کنید.

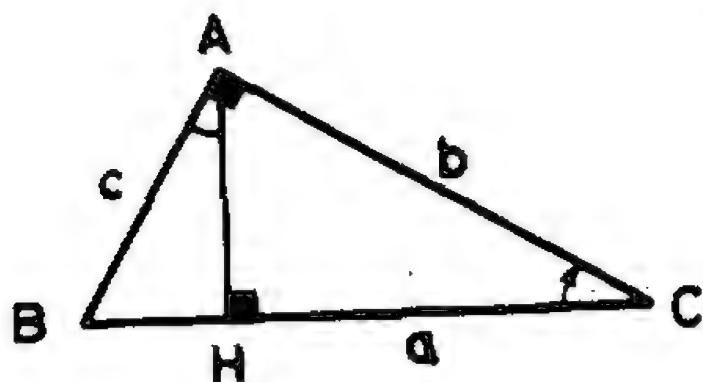
۴- در نیمدایره‌ای به‌قطر AB دو وتر دلخواه AM و BN راکه در نقطهٔ P متقاطعند در نظر می گیریم ، ثابت‌کنید $AP\cdot AM+BP\cdot BN$ مقدار ثابت دارد و با تغییر وترها تغییر نمی کند.

۳.۱- روابط طولی در مثلث

۱.۳.۱- یادآوری رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه - رابطه‌های طولی بین‌اجزای‌مثلث قائم‌الزاویه را قبلاً مطالعه کرده‌ایم. در این بخش‌تنها به یادآوری‌آنها می‌پردازیم:

۲.۳.۱- قضیه- در هرمثلث‌قائم‌الزاویه، مربع‌اندازهٔ هرضلع‌زاویهٔ قائمه برابراست با حاصل‌ضرب وتر در تصویر قائم همان ضلع بروتر.

یعنی اگر مثلث ABC، (شکل۱-۱۱)، در رأس A قائم‌الزاویه باشد و اندازه‌های اضلاع‌مقابل‌به سه‌رأس A و B و C را به‌ترتیب با a و b و c نمایش دهیم و $AH \perp BC$ باشد:



(شکل ۱-۱۱)

$$b^2 = a \cdot CH \quad \text{و} \quad c^2 = a \cdot BH$$

به بیان دیگر:

در هر مثلث قائم‌الزاویه هرضلع زاویهٔ قائمه واسطه هندسی است بین وتـر و تصویر قائم همان ضلع بر وتر.

۳.۳.۱- قضیه‌فیثاغورس- درهرمثلث‌قائم‌الزاویه مربع‌اندازهٔ وتربا مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه مساوی است. یعنی:

$$(\triangle ABC : \hat{A} = 90^\circ) \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

۴.۳.۱- قضیه - در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع ارتفاع نظیر وتر با حاصل‌ضرب دو قطعه‌ای که بروتر پدید می‌آورد مساوی است. یعنی:

$$(\triangle ABC : \hat{A} = 90^\circ \quad \text{و} \quad AH \perp BC) \Longrightarrow AH^2 = BH \cdot CH$$

به‌بیان دیگر:

در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع نظیر وتر واسطهٔ هندسی است بین دو قطعهٔ وتر.

۵.۳.۱- قضیه - در هـر مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ میانهٔ نظیر وتـر نصف اندازهٔ وتـر است. یعنی:

$$(\triangle ABC : \hat{A} = 90^\circ \quad \text{و} \quad BM = CM) \Longrightarrow AM = \frac{BC}{2}$$

۶.۳.۱- قضیه - درهرمثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ ضلع مقابل‌به زاویهٔ 30° مساوی نصف اندازهٔ وتر است. یعنی:

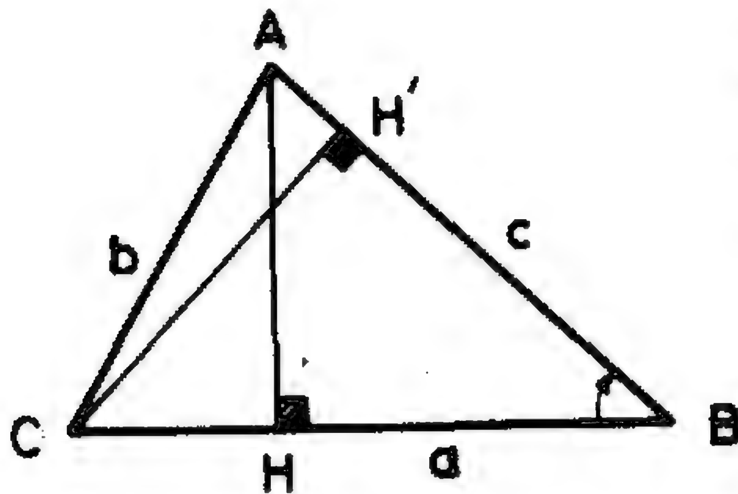
$$(\triangle ABC : \hat{A} = 90^\circ \quad \text{و} \quad \hat{B} = 30^\circ) \Longrightarrow AC = \frac{1}{2} BC$$

۷.۳.۱- قضیه ـ در هر مثلث قائم‌الزاویه حاصل‌ضرب دوضلع زاویه قائمه برابر است با حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد برآن. یعنی:

$$(\triangle ABC: \hat{A}=۹۰^\circ \text{ و } AH\perp BC) \Longrightarrow AB\cdot AC=AH\cdot BC$$

رابطه‌های طولی در مثلث غیر مشخص

۸.۳.۱ -قضیهٔ۱- مربع ضلع مقابل به زاویهٔحاده از هر مثلث برابر است با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل‌ضرب یکی از این دو ضلع در تصویر دیگری بر همین ضلع.



(شکل ۱-۱۲)

یعنی اگر در مثلث ABC، $\hat{B}<۹۰^\circ$ و AH و CH' ارتفاعهای نظیر دو رأس A و C باشند، (شکل ۱-۱۲):

$$(۱)\quad b^۲=c^۲+a^۲-۲a\cdot BH$$

$$(۲)\quad b^۲=c^۲+a^۲-۲c\cdot BH'$$

برهان ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC بنا به قضیهٔ فیثاغورس $b^۲=CH^۲+AH^۲$ اما $CH=a-BH$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم: $AH^۲=c^۲-BH^۲$، بنابراین:

$$b^۲=(a-BH)^۲+c^۲-BH^۲$$

یا:

$$b^۲=a^۲+BH^۲-۲a\cdot BH+c^۲-BH^۲$$

پس:

$$(۱)\quad b^۲=a^۲+c^۲-۲a\cdot BH$$

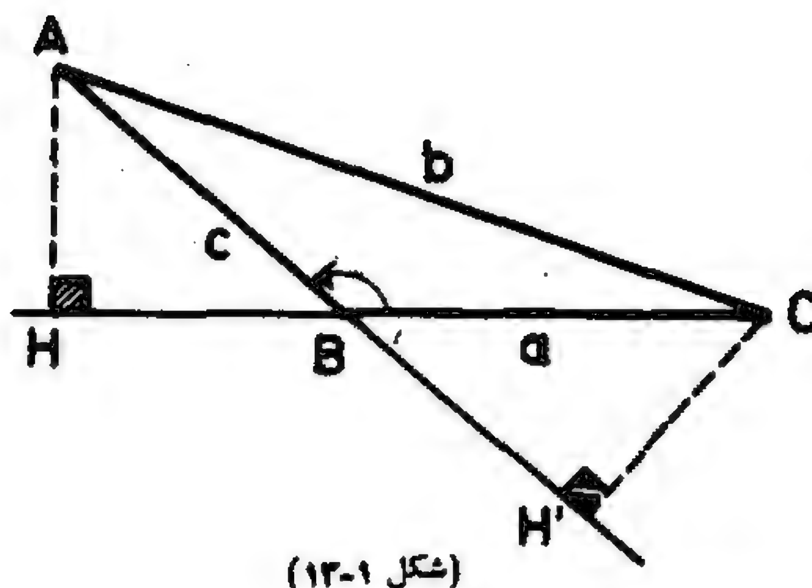
اگرجای a و c را دربرهان بالا باهم عوض‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$(۲)\quad b^۲=a^۲+c^۲-۲c\cdot BH'$$

۹.۳.۱- قضیهٔ ۲- مربع ضلع مقابل به‌زاویهٔ منفرجهٔ مثلث برابراست بامجموع مربعهای‌دوضلع دیگر به علاوهٔ دوبرابر حاصل‌ضرب یکی ازاین دوضلع درتصویر دیگری برهمین ضلع.

یعنی اگر درمثلث ABC، $\hat{B}>۹۰^\circ$ و AH و CH' ارتفاعهای نظیر دورأس A و C

باشند، (شکل ۱–۱۳)



(شکل ۱-۱۳)

$$b^2=c^2+a^2+2a\cdot BH$$
$$b^2=c^2+a^2+2c\cdot BH'$$

قضیه را باتوجه بهشکل با برهانی مشابه آنچه در قضیهٔ قبل دیده‌اید، ثابت کنید.

توجه ۱- حکم قضیه ۱و۲ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$b^2=c^2+a^2\pm 2a\cdot BH$$

توجه ۲- با توجه به‌اینکه درمثلث قائم‌الزاویه ABH داریم، $BH=c\cdot\cos B$ یا $BH=-c\cdot\cos B$ رابطهٔ فوق به‌صورت زیر نیز بیان می‌شود:

$$b^2=c^2+a^2\pm 2ac\cos B$$

توجه ۳- اگر زاویه B در دو قضیه اخیر قائمه فرض شودآنگاه BH و BH' صفر می‌شوند و داریم:

$$b^2=c^2+a^2$$

تمرین

۱ـ اندازه‌های دوضلع ازیك مثلث ۸ و ۱۲ سانتیمتر وزاویهٔ بین‌آن دوضلع °۶۰ است. ضلع سوم ومساحت وارتفاعهای مثلث را حساب‌کنید.

۲ـ درمثلثی اندازه‌های دوضلع $a=15$ و $b=20$ سانتیمتر واندازهٔ زاویهٔ بین این دو ضلع °۱۵۰است. ضلع سوم وارتفاعهای مثلث را حساب‌کنید.

۳- ثابت‌کنید مجموع مربعهای اندازه‌های اضلاع هرمتوازی الاضلاع بامجموع مربعهای اندازه‌های دوقطر آن برابر است.

۴ـ اگراندازهٔ یك زاویه ازمثلثی °۱۲۰ باشد، بین اضلاع‌آن چه رابطه‌ای برقرار‌است؟

۵- ثابت‌کنید مجموع مربعهای فاصله‌های هر نقطهٔ واقع برصفحهٔ یك مستطیل از دورأس مقابل‌آن مساوی مجموع مربعهای فاصله‌های آن نقطه ازدورأس دیگر مستطیل است.

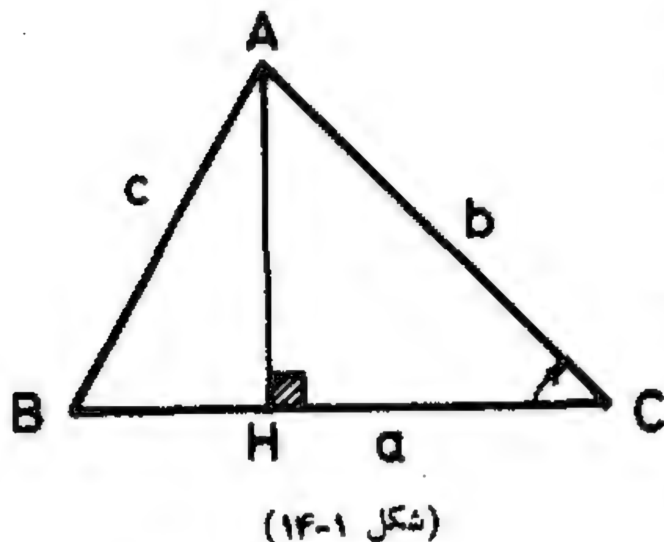
۶ـ اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۱۵ و ۱۸ و ۲۴ سانتیمترند. اندازهٔ ارتفاع نظیر ضلع بزرگتر را حساب‌کنید.

۴.۱ـ محاسبه اجزای خطی مثلث برحسب اندازه‌های سه ضلع

۱.۴.۱ـ محاسبهٔ ارتفاعها ـ اگر پاره خط AH ارتفاع نظیر رأس A ازمثلث ABC باشد، (شکل ۱ـ۱۴)، درمثلث قائم‌الزاویهٔ AHC بنا به‌قضیه فیثاغورس:

$$(1) \quad AH^2 = b^2 - HC^2$$

ازطرفی در $\triangle ABC$،



(شکل ۱-۱۴)

$$(\angle C < 90^\circ \implies c^2 = b^2 + a^2 - 2a \cdot HC)$$

وازاین تساوی $HC = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$ به دست می‌آیدکه اگر آن را درتساوی (۱) قراردهیم، خواهیم داشت :

$$(2) \quad AH^2 = b^2 - \frac{(b^2 + a^2 - c^2)^2}{4a^2}$$

از این تساوی اندازهٔ ارتفاع AH برحسب اندازه‌های سه‌ضلع مثلث به دست می‌آید . اما این دستور را می‌توان به‌صورت دیگری، که به خاطر سپردن آن آسانتر است، تبدیل کرد. برای این منظور ملاحظه می‌کنیم که طرف دوم تساوی (۲) را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$AH^2 = \frac{1}{4a^2}[4a^2b^2 - (b^2 + a^2 - c^2)^2]$$

وچون عبارات داخل قلابها تفاضل دومربع است :

$$AH^2 = \frac{1}{4a^2}[2ab + b^2 + a^2 - c^2][2ab - b^2 - a^2 + c^2]$$

هنوز هریك ازعبارتهای داخل قلابهارا به‌صورت‌زیربه‌تفاضل دومربع می‌توان تبدیل‌کرد:

$$AH^2 = \frac{1}{4a^2}[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]$$

یا :

$$AH^2 = \frac{1}{4a^2}[a+b+c][a+b-c][c+(a-b)][c-(a-b)]$$

اگرمحیط مثلث را با $2p$ نمایش دهیم، $a+b+c = 2p$ وازآنجا :

$$c+b-a = 2p-2a \text{ و } c+a-b = 2p-2b \text{ و } a+b-c = 2p-2c$$

وبنابراین می‌توان نوشت:

$$AH^2 = \frac{1}{4a^2} \times 2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)$$

یا :

$$AH^2 = \frac{4}{a^2} p(p-a)(p-b)(p-c)$$

هریك از عبارتهای داخل پرانتزهای طرف دوم تساوی اخیر یك عدد مثبت است(چرا؟)، بنا براین حاصل ضرب آنها عـدد مثبتی است وریشهٔ دوم دارد. لذا ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC را برحسب اندازه‌های سه ضلع آن ازدستور زیر بدست می‌آوریم:

$$AH = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (1-1)$$

اندازه‌های ارتفاعهای واردبراضلاع یك مثلث ABC را به ترتیب با نمادهای h_a و h_b و h_c نمایش می‌دهیم؛ اگردررابطهٔ فوق جای a حرف b را جایگزین کنیم h_b به‌دست‌می‌آیدو به‌همین ترتیب اگر درهمان دستور جای a حرف c را جایگزین کنیم h_c مشخص می‌شود.

۲.۴.۱ ـ محاسبهٔ مساحت مثلث ـ چنان‌که می‌دانیم اگر مساحت مثلث ABC را با S نمایش دهیم : $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$، و اگر h_a را ازدستور (۱ـ۱) دراین تساوی قراردهیم، خواهیم‌داشت:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (1-2)$$

این رابطه را به‌عنوان دستور **Heron** در مساحی به‌کار می‌بریم.

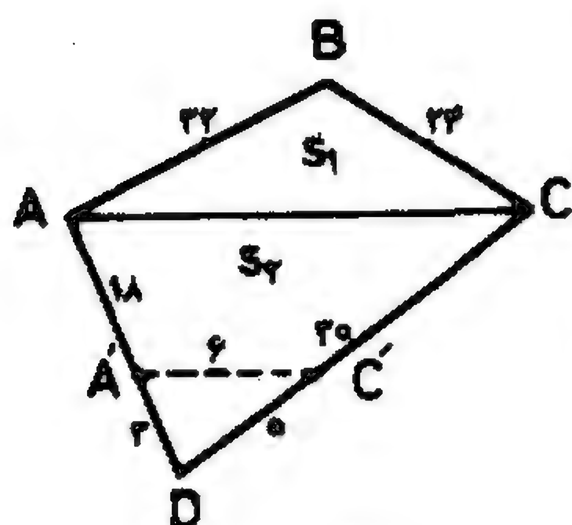
مثال۱ـ در مثلثی که اندازه‌های سه ضلع آن برحسب سانتیمتر $a=8$ و $b=5$ و $c=11$ باشد، $p=12$ و $p-a=4$ و $p-b=7$ و $p-c=1$ و بنابراین مساحت مثلث $S = \sqrt{12 \times 4 \times 7 \times 1} = 4\sqrt{21}$ سانتیمترمربع وسه‌ارتفاع آن‌برحسب‌سانتیمتر $h_a = \sqrt{21}$ و $h_b = \frac{8}{5}\sqrt{21}$ و $h_c = \frac{8}{11}\sqrt{21}$ است.

مثال۲ـ درمثلث متساوی‌الساقینی که قاعدهٔ آن a و اندازهٔ هریك از دوساق آن b باشد، $S = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$ و اندازه‌های ارتفاعها برحسب اضلاع مثلث، $h_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ و $h_b = h_c = \frac{a}{2b}\sqrt{4b^2 - a^2}$ است (چرا؟).

مثال۳ـ در مثلث متساوی‌الاضـلاعـی کـه اندازهٔ هـر ضلع آن a باشد، $p = \frac{3a}{2}$ و

$p-a=p-b=p-c=\frac{a}{۲}$ و در نتیجه مساحت مثلث $S=\frac{a^۲}{۴}\sqrt{۳}$ و هر یك از ارتفاعهای آن $h=\frac{a}{۲}\sqrt{۳}$ (چرا؟).

مسئله- زمینی است به شکل چهار ضلعی که اندازه‌های چهار ضلع آن در (شکل ۱-۱۵) داده شده‌اند. اندازهٔ قطر AC را به علت وجود موانع وساختمان با اندازه گیری نمی توان تعیین کرد. برای تعیین مساحت زمین بر اضلاع $\angle D$ پاره‌خطهای ۳ $=DA'$ و ۵ $=DC'$ متر را جدا می کنیم $A'C'$ موازی AC می‌شود و فاصلهٔ دو نقطهٔ C' و A' را اندازه می گیریم که مساوی ۶ متر است، حال ملاحظه می کنیم که:



(شکل ۱-۱۵)

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D}=\frac{۳۰}{۵}\Longrightarrow AC=۳۶$$

اگر مساحتهای دو مثلث ABC و ADC را به ترتیب $S_۱$ و $S_۲$ بنامیم، با معلوم بودن اضلاع مثلثها $S_۱=۴\sqrt{۸۸۵۵}$ و $S_۲=۷۲\sqrt{۱۴}$ به دست می‌آید و در نتیجه مساحت زمین با تقریب کمتر از یك دسیمتر مربع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S=S_۱+S_۲=۶۴۵/۸$$

تمرین

۱- اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۱۲ و ۱۵ و ۱۸ سانتیمترند، مساحت و ارتفاعهای آن را حساب کنید.

۲- مساحت مثلث متساوی‌الساقینی $۱۶\sqrt{۳}$ سانتیمتر مربع و اندازهٔ هر ساق آن ۸ سانتیمتر است. قاعده و ارتفاعها و زاویه‌های مثلث را حساب کنید.

۳- زمینی است به شکل چهار ضلعی گوژ که اندازه‌های چهار ضلع متوالی آن ۲۴ و ۳۲ و ۲۰ و ۲۸ متر است و دو ضلع اولی آن بر یکدیگر عمودند. مساحت زمین را تعیین کنید.

۴- دو قاعدهٔ ذوزنقه‌ای به‌ترتیب ۷ و ۸/۲ سانتیمتر و دو ساق آن ۳ و ۲/۴ سانتیمتر است. ذوزنقه را رسم کنید و مساحت آن را حساب کنید.

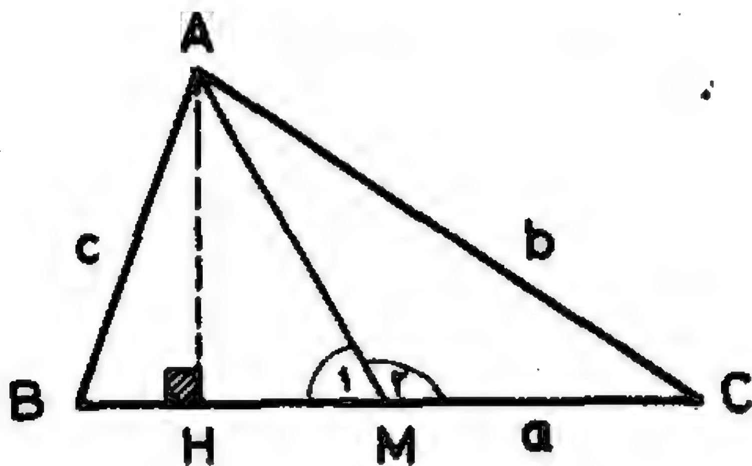
۵- ثابت کنید مساحت هر مثلث قائم‌الزاویه در رأس A از دستورهای زیر به‌دست می‌آید.

$$S=p(p-a)=(p-b)(p-c)$$

۳.۴.۱- محاسبهٔ میانه‌ها - در مثلث ABC (شکل ۱-۶) میانهٔ AM را رسم می کنیم.

از روی شکل دیده می‌شود که :

$$\angle AMB<90^\circ \implies c^2=AM^2+BM^2-2BM\cdot MH$$
$$\angle AMC>90^\circ \implies b^2=AM^2+MC^2+2MC\cdot MH$$



(شکل ۱-۱۶)

اما $BM=MC=\frac{a}{2}$ است، بنابراین:

$$(1)\quad c^2=AM^2+\frac{a^2}{4}-a\cdot MH$$

$$(2)\quad b^2=AM^2+\frac{a^2}{4}+a\cdot MH$$

و چون این دو تساوی را عضو به عضو با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$(3)\quad b^2+c^2=2AM^2+\frac{a^2}{2}$$

یعنی :

قضیه - در هر مثلث مجموع مربعهای هردو ضلع برابر است با دو برابر مربع میانهٔ نظیر ضلع‌سوم به‌علاوهٔ نصف مربع ضلع سوم.

از تساوی (۳) نتیجه می‌شود :

$$4AM^2=2(b^2+c^2)-a^2$$

و اگر میانهٔ نظیر ضلع a از مثلث را با نماد m_a نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$(3-1)\qquad \boxed{m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}$$

هرگاه در این دستور a را به b و b را به a تبدیل کنیم دستور مربوط به محاسبهٔ m_b حاصل می‌شود و با عوض‌کردن جای a و c دستور محاسبهٔ m_c به‌دست می‌آید.

اگر تساویهای (۲) و (۱) را با فرض $b>c$ عضو به عضو از یکدیگر تفریق کنیم، خواهیم داشت:

$$b^2-c^2=2a\cdot MH$$

یعنی :

قضیه - در هرمثلث تفاضل مربعهای هردوضلع برابر است با دو برابر حاصل‌ضرب ضلع‌سوم

در تصویرمیانهٔ نظیر ضلع سوم بر آن ضلع.

تمرین

۱- اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۱۰ و ۱۴ و ۲۲ سانتیمترند. سه میانهٔ مثلث‌را حساب کنید. کوچکترین میانه نظیر کدام ضلع است؟

۲- اندازه‌های سه‌میانهٔ مثلثی برحسب سانتیمتر $۲\sqrt{۱۰}$ و $۲\sqrt{۳۱}$ و $۲\sqrt{۴۶}$ می‌باشند، اضلاع مثلث را حساب کنید.

۳- اندازه‌های میانه و ارتفاع نظیر رأس A از مثلثی به ترتیب ۵ و ۴ سانتیمترند و بین اندازه‌های سه ضلع مثلث‌رابطهٔ $b^۲+c^۲=۵a^۲$ برقرار است. سه‌ضلع مثلث‌را حساب کنید.

۴- ثابت کنید مجموع مربعهای اضلاع هرچهار ضلعی برابر است با مجموع مربعهای دو قطرآن چهار ضلعی به علاوهٔ چهار برابر مربع پاره خطی که وسطهای قطرها را به‌هم وصل می‌کند.

۵- ثابت کنید مجموع‌مربعهای دو قطرهرچهارضلعی گوژ مساوی دو برابرمجموع مربعهای پاره خطهایی است که وسطهای هردو ضلع مقابل چهار ضلعی را بههم وصل می‌کنند.

۶- ثابت کنید مجموع مربعهای سه میانهٔ هر مثلث مساوی $\frac{۳}{۴}$ مجموع مربعهای اضلاع‌آن مثلث است.

۴.۴.۱- محاسبهٔ نیمسازها- قبلاً ثابت کرده‌ایم که نیمسازهای هرزاویهٔ مثلث ضلع مقابل به‌آن زاویه را به نسبت اضلاع زاویه تقسیم می‌کنند.

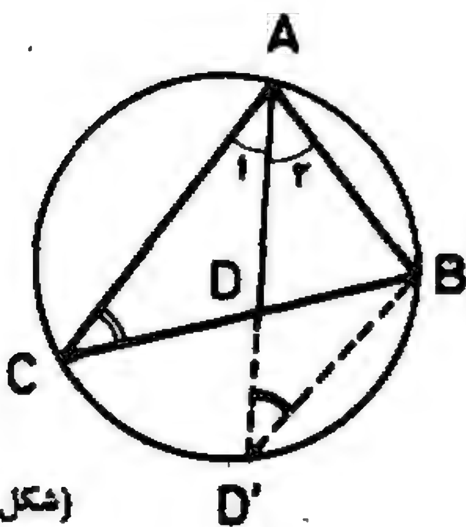
حال ویژگیهای دیگری از مثلث را ثابت می‌کنیم که در محاسبهٔ نیمسازهای زاویه‌های مثلث برحسب اضلاع آن از آنها استفاده می‌شود. این ویژگیها را با قضایای زیر بیان می‌کنیم:

۵.۴.۱- قضیهٔ ۱ - در هرمثلث، مربع‌نیمساز هر زاویه درونی‌برابر است با حاصل‌ضرب دوضلع آن زاویه منهای حاصل ضرب دوپاره خطی‌که آن نیمساز برضلع سوم پدید می‌آورد.

یعنی‌اگر در مثلث‌ABC (شکل۱-۱۷)، پاره‌خط AD نیمساز زاویهٔ درونی A باشد:

$$AD^۲=AB\cdot AC-BD\cdot DC$$

برهان - دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم، اگر امتداد AD این دایره را در



(شکل ۱-۱۷)

نقطهٔ D' قطع کند و نقاط B و D' را بهم وصل کنیم ، در دو مثلث ABD' و ADC می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix}\angle A_1=\angle A_2\\ \angle D'=\angle C\end{matrix}\right\}\Rightarrow \triangle ADC\sim\triangle ABD' \Rightarrow \frac{AB}{AD'}=\frac{AD}{AC}$$

از این تناسب حاصل می‌شود :

$$AB\cdot AC=AD\cdot AD'$$

و چون $AD'=AD+DD'$:

$$AB\cdot AC=AD(AD+DD')$$

یا :

$$AB\cdot AC=AD^2+AD\cdot DD'$$

اما $AD\cdot DD'=BD\cdot DC$ (چرا؟)

بنابراین :

$$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$$

۱-۴-۶- قضیهٔ ۲ ـ در هر مثلث، مربع نیمساز هر زاویهٔ برونی برابر است با حاصل ضرب دو پاره خطی که‌آن نیمساز برضلع سوم پدید می‌آورد منهای حاصل‌ضرب دوضلع آن زاویه.

یعنی اگـر در (شکل ۱-۱۸)، $AB>AC$ و AD' نیمساز زاویهٔ xAC باشد:

$$AD'^2=D'B\cdot D'C-AB\cdot AC$$

برهان ـ با توجه به شکل برهان را به صورت‌زیر کامل کنید:

(شکل ۱-۱۸)

امتداد نیمساز زاویهٔ xAC دایره محیطی مثلث را در نقطهٔ M قطع می‌کند (چرا؟) ، و ملاحظه می‌کنیم که :

$$(\angle MAB=\angle D'AC \text{ و } \angle M=\angle C_1) \Rightarrow (\triangle AMB\sim\cdots)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{\cdots}{D'A} \Rightarrow AB\cdot AC=AM\cdot D'A$$

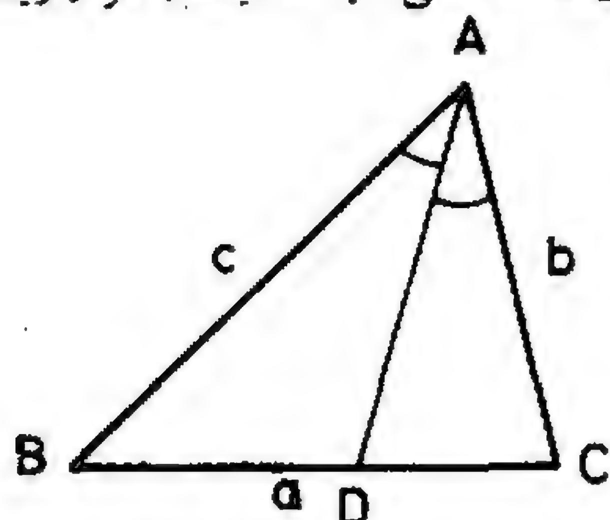
با توجه به برهان قضیهٔ قبل برهان را ادامه دهید.

تمرین

۱ـ اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، از قضیهٔ ۲ چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟

۲ـ در مثلثی $\angle A = 60^\circ$ و ضلع $b = 8\sqrt{3}$ سانتیمتر و اندازهٔ پاره‌خط CD که نیمساز زاویهٔ درونی A برضلع BC جدا می‌کند ۸ سانتیمتر است، اولا با فرض $b > c$ مثلث را رسم کنید. به فرض $b > c$ درکدام قسمت از رسم مثلث نیاز دارید؟ ثانیاً اندازه‌های اضلاع و زاویه‌های مثلث و نیمسازهای زاویه‌های درونی آن را حساب کنید.

۷.۴.۱ـ دستور محاسبهٔ نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث ـ می‌دانید که نیمساز هر زاویهٔ درونی مثلث برضلع مقابل آن زاویه دو پاره خط متناسب با دو ضلع زاویه پدید می‌آورد، پس اگر در شکل (۱ـ۱۹) پاره خط AD نیمساز $\angle A$ باشد:



(شکل ۱-۱۹)

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{CD+DB}{DB} = \frac{AC+AB}{AB}$$

و در نتیجه: $DB = \dfrac{ac}{b+c}$ و به همین ترتیب: $CD = \dfrac{ab}{b+c}$ به دست می‌آید. حال اگر در رابطهٔ

$$AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot CD$$

به‌جای این دوپاره خط اندازه‌های آنها را برحسب اضلاع قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$AD^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

از این دستور اندازهٔ نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث برحسب اندازه‌های سه ضلع آن تعیین می‌شود. اما این دستور را به‌صورتی که به خاطرسپردن‌آن‌سهلتر است می‌توان تبدیل کرد. برای این منظور طرف دوم تساوی بالا را به صورتهای زیر تغییر می‌دهیم:

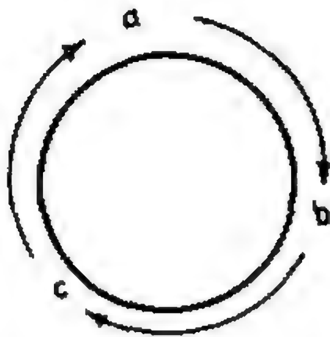
$$AD^2 = bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right] = \frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2 - a^2] =$$

$$\frac{bc}{(b+c)^2}(b+c+a)(b+c-a)$$

با ملاحظهٔ آن‌که $b+c+a=۲p$ و $b+c-a=۲p-۲a$ است، اگر اندازهٔ نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث را با نماد d_a نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$d_a=\frac{۲}{(b+c)}\sqrt{bcp(p-a)} \qquad (۴-۱)$$

با تبدیل دوری a به b و b به c و c به a دستورهای محاسبهٔ d_b و d_c حاصل می‌شود.



برای تعیین اندازهٔ نیمساز زاویهٔ برونی رأس A از مثلث با استفاده از قضیهٔ ۶.۴.۱ و با ملاحظهٔ آن‌که این نیمساز برضلع BC دو پاره‌خط به اندازه‌های:

$$D'C=\frac{ab}{b-c} \text{ و } D'B=\frac{ac}{b-c}$$

(با فرض $b>c$) پدید می‌آورد، دستور:

$$d'_a=\frac{۲}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

را می‌توان نتیجه گرفت که در حالت کلی، از آن‌نظر که در مثلث گاهی $b>c$ و زمانی $c>b$ است، آن را به‌صورت کلی زیر درنظر می‌گیریم:

$$d'_a=\frac{۲}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)} \qquad (۵-۱)$$

با تبدیل دوری a و b و c به‌یکدیگر دستورهای محاسبهٔ d'_b و d'_c حاصل می‌شود.

مثال - اگر اندازه‌های سه ضلع مثلثی برحسب سانتیمتر $a=۱۵$ و $b=۲۵$ و $c=۱۶$ باشند، اندازه‌های نیمسازهای زاویه‌ها به‌این صورت محاسبه می‌شوند:

$$d_a=\frac{۲}{۴۱}\sqrt{۲۵\times۱۶\times۲۸\times۱۳}=\frac{۸۰}{۴۱}\sqrt{۹۱}$$

و اگر به همین ترتیب عمل کنید خواهید دید که :

$$d'_a=\frac{۸۰}{۳} \text{ و } d_c=۳\sqrt{۳۵} \text{ و } d_b=\frac{۴۸}{۳۱}\sqrt{۳۵}$$

و ...

تمرین

۱ـ اندازه‌های سه ضلع مثلثی برحسب سانتیمتر ۱۲ و ۱۵ و ۱۳ می‌باشند ، اندازه‌های نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی آن را حساب کنید.

۲ـ اگر S مساحت یك مثلث قائم‌الزاویه و d_a و d'_a اندازه‌های نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی رأس قائم آن باشند ، ثابت کنید:

$$d'_a=\frac{۲S\sqrt{۲}}{|b-c|} \text{ و } d_a=\frac{۲S\sqrt{۲}}{b+c}$$

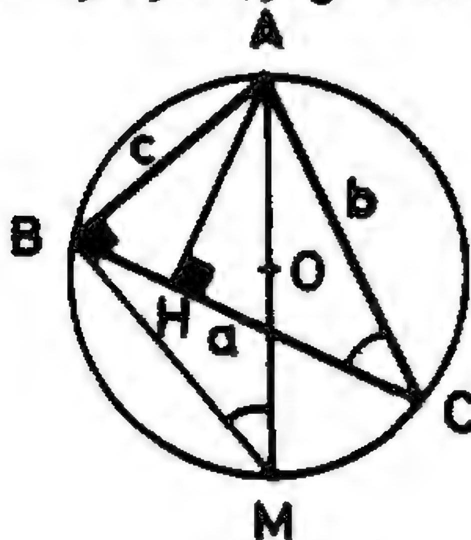
۳ـ اندازه‌های نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی رأس قائم مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۱۲ و ۵ سانتیمترند، حساب کنید.

۴ـ ثابت کنید اگر در مثلثی $b^۲-c^۲=۴bc$ ، (با فرض $b>c$) باشد ، بین مساحت و اندازه‌های نیمسازهای زاویه‌های درونی‌وبرونی رأس A رابطهٔ $S=d_a\cdot d'_a$ برقرار است.

۵ـ در مثلثی که اندازه‌های دو ضلع آن برحسب سانتیمتر ۱۰ و ۸ و زاویهٔ بین‌آن‌دوضلع °۶۰ باشد ، نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی بین این دوضلع را حساب کنید.

۸.۴.۱ـ محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ـ اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را برحسب اندازه‌های اضلاع آن با استفاده از قضیهٔ زیر تعیین می‌کنیم .

قضیه - حاصل‌ضرب دوضلع از هرمثلث برابر است با حاصل‌ضرب قطر دایرهٔ محیطی آن در ارتفاع وارد برضلع سوم.



(شکل ۱ـ۲۰)

برهان ـ در مثلث ABC (شکل ۱ـ۲۰) ارتفاع AH و آن قطر از دایرهٔ محیطی را که از رأس A می‌گذرد یعنی قطر AOM را رسم می‌کنیم ونقطهٔ M را به‌نقطهٔ B وصل می‌کنیم. در دومثلث ABM وAHC خواهیم داشت :

$$\left.\begin{array}{l}\angle M=\angle C\\ \angle H=\angle B\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABM \sim \triangle AHC$$

بنا براین :

$$\frac{AB}{AM}=\frac{AH}{AC} \implies AB\cdot AC=AM\cdot AH$$

اگر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را با R نمایش دهیم ، از این رابطه خواهیم داشت:

$$bc=۲R\cdot h_a$$

و چون در هرمثلث $h_a=\frac{۲}{a}S$ است ، شعاع دایرهٔ محیطی را برحسب اندازه‌های اضلاع آن از دستور زیر تعیین می کنیم :

$$R=\frac{abc}{۴S} \qquad (۱-۶)$$

مثال ۱- در مثلثی که اندازه‌های اضلاع آن ۲۴ و ۳۰ و ۳۶ متر باشند ، $p=۴۵$ و $S=۱۳۵\sqrt{۷}$ و شعاع دایرهٔ محیطی $R=\frac{۴۸\sqrt{۷}}{۷}$ است.

مثال ۲- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع زاویهٔ قائمه آن b و c باشند ، مساحت:

$$S=\frac{۱}{۲}bc$$

و بنابراین شعاع دایرهٔ محیطی :

$$R=\frac{abc}{۲bc}=\frac{a}{۲}$$

است. یعنی: شعاع دایرهٔ محیطی‌هرمثلث قائم‌الزاویه نصف وترآن است.

مثال ۳- در مثلث متساوی‌الساقینی که قاعده و ساق آن برحسب سانتیمتر به ترتیب ۱۶ و $۸\sqrt{۵}$ باشد، $p=۸\sqrt{۵}+۸$ و $S=۱۲۸$ و در نتیجه شعاع‌دایرهٔ محیطی $R=۱۰$ سانتیمتر است (چرا؟).

تمرین

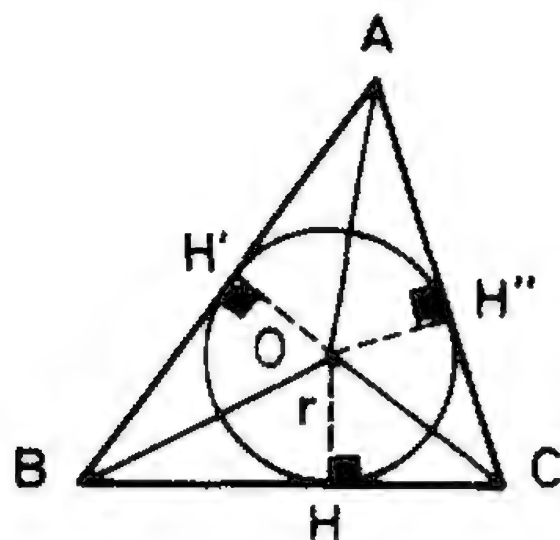
۱- اندازه‌های سه‌ضلع مثلثی ۲۴ و ۱۸ و ۱۲ سانتیمترند. شعاع دایرهٔ محیطی آن را حساب کنید.

۲- مثلثی‌رسم کنید که اندازهٔ یك‌ضلع آن سه سانتیمتر و اندازهٔ شعاع‌دایرهٔ محیطی‌آن ۲/۵ سانتیمتر و اندازهٔ ارتفاع نظیر یکی از دوضلع دیگرش ۱/۸ سانتیمترباشد. دو ضلع دیگرمثلث را حساب کنید.

۳ـ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که مساحت آن ۸۴ سانتیمتر مربع و اندازهٔ یکی از ارتفاعهای آن ۳/۳۶ سانتیمتر است، حساب کنید.

۴ـ قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی ۱۰ سانتیمتر و اندازهٔ هریك از دو ساق آن ۱۳ سانتیمتر است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی و هریك از ارتفاعهای مثلث را حساب کنید.

۱.۴. ۹ ـ محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث. اگر در مثلث ABC (شکل ۱-۲۱) نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی درونی را به سه رأس وصل کنیم، مثلث به سه مثلث AOB و AOC و BOC تقسیم می‌شود. ارتفاعهای نظیر سه ضلع AB و AC و BC این سه مثلث پاره خطهای OH' و OH'' و OH هستند که هریك شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث است (چرا؟). بنابراین مساحتهای این سه مثلث $\frac{1}{2}ar$ و $\frac{1}{2}br$ و $\frac{1}{2}cr$ و در نتیجه مساحت $\triangle ABC$، به‌صورت زیر است:



(شکل ۱-۲۱)

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

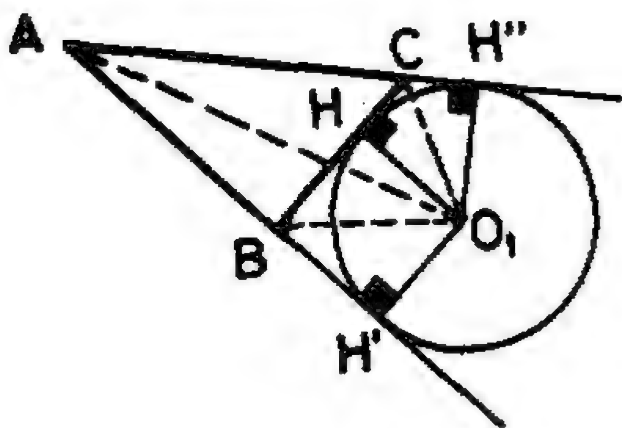
از این تساوی شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$r=\frac{S}{p} \qquad (۱-۷)$$

در شکل (۱-۲۱) داریم: $AH'=P-a$ ، $BH'=P-b$ و $CH=P-c$ چرا؟

مثال ۱ـ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن برحسب سانتیمتر ۱۲ و ۵ باشند، وتر $a=\sqrt{b^2+c^2}=13$ سانتیمتر و $p=15$ و $S=30$ و در نتیجه شعاع دایرهٔ محاطی درونی $r=\frac{30}{15}=2$ سانتیمتر است.

مثال ۲ـ در مثلثی که اندازه‌های اضلاع آن برحسب سانتیمتر ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ باشند، نصف محیط $p=18$ سانتیمتر و مساحت $S=24\sqrt{6}$ سانتیمتر مربع و شعاع دایرهٔ محاطی درونی $r=\frac{4}{3}\sqrt{6}$ سانتیمتر است.



(شکل ۱-۲۲)

۱۰.۴.۱- محاسبهٔ شعاعهای دایره‌های محاطی برونی مثلث ـ اگر در مثلث ABC (شکل ۱-۲۲) نقطهٔ O_1 مرکز دایرهٔ محاطی برونی نظیرضلع BC را به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث O_1BC و O_1AB و O_1AC بر سه ضلع مثلث بنا می‌شوند که در رأس O_1 مشترکند. به آسانی می‌توان دید که مساحت مثلث مفروض فزونی مجموع مساحتهای دو مثلث O_1AB و O_1AC برمساحت مثلث O_1BC است؛ یعنی:

$$S_{ABC}=S_{O_1AB}+S_{O_1AC}-S_{O_1BC}$$

ارتفاعهای نظیر رأس O_1 ازسه مثلث هرسه شعاعی از دایرهٔ محاطی برونی نظیر ضلع BC هستند پس اگر شعاع این دایره را با r_a نمایش دهیم، از تساوی بالا حاصل می‌شود:

$$S=\frac{1}{2}(b+c-a)r_a$$

اما در هر مثلث $b+c-a=2p-2a$ است. بنابراین رابطهٔ بالا را به‌صورت:

$$S=(p-a)r_a$$

می‌توان تبدیل کرد. از این تساوی دستور محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی برونی مثلث نظیرضلع a به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$r_a=\frac{S}{p-a} \qquad (۱-۸)$$

اگر در این دستور a را با b عوض کنیم r_b به دست می‌آید و به‌همین ترتیب r_c مشخص می‌شود.

درشکل(۱-۲۲)داریم: $AH'=AH''=P$ ، $BH'=P-c$ و $CH''=P-b$ چرا؟

مثال ۱- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۱۲ و ۹ سانتیمتر باشند، وتر ۱۵ سانتیمتر و مساحت مثلث ۵۴ سانتیمتر مربع و نصف محیط $p=۱۸$ سانتیمتر است، از دستور فوق $r_a=۱۸$ ، $r_b=۹$ و $r_c=۶$ سانتیمتر به‌دست می‌آید.

مثال ۲- در مثلث متساوی‌الساقینی که اندازه‌های قاعده و یک ساق آن به‌ترتیب ۲۴ و ۱۳

سانتیمتر باشند، $p=25$ و $S=60$ سانتیمترمربع (چرا؟) و اندازه‌های شعاعهای دایره‌های محاطی برونی $r_a=60$ و $r_b=r_c=5$ سانتیمتر است.

تمرین

۱ـ شعاعهای دایره‌های محاطی درونی و برونی مثلث‌قائم‌الزاویه‌ای را که اندازه‌های دو ضلع‌زاویهٔ قائمهٔ آن ۱۲ و ۱۶ سانتیمترند حساب کنید.

۲ـ اندازهٔ قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی ۱۶ سانتیمتر و ارتفاع آن ۶ سانتیمتر است، اندازه‌های‌شعاعهای دایره‌های محاطی‌آن را تعیین کنید.

۳ـ شعاع دایرهٔ محاطی برونی مثلث متساوی‌الاضلاعی ۱۲ سانتیمتر است، اندازهٔ ضلع مثلث را تعیین کنید.

۴ـ مثلث متساوی‌الساقینی را که شعاع دایرهٔ محاطی‌درونی و قاعدهٔ آن معلومند رسم کنید. اگر $r=3$ و $a=8$ سانتیمترباشد ساقها و شعاعهای دایره‌های محاطی مثلث را حساب کنید.

۵ـ ثابت کنید بین اندازه‌های ارتفاعها و شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی هرمثلث رابطه‌های زیر برقرارند:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c} \quad , \quad S^2=r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c$$

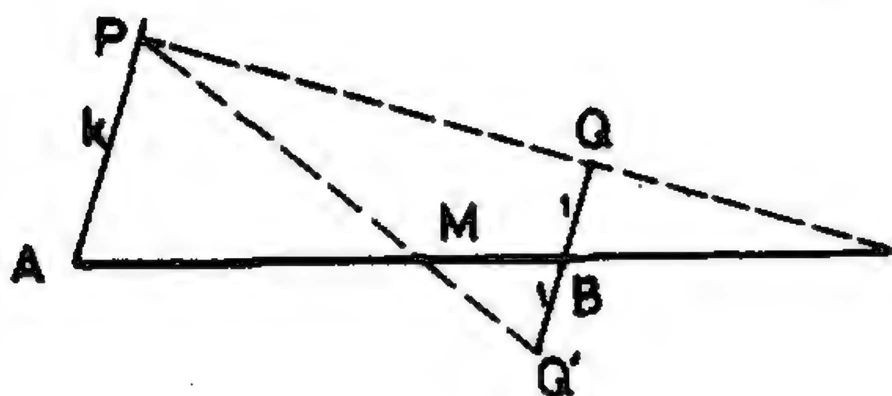
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

۶ـ مساحت یك مثلث و شعاع دایرهٔ محاطی و یکی از شعاعهای دایره‌های محاطی‌برونی آن داده شده‌اند، مثلث را رسم کنید. اگر $r=2$ و $r_a=9$ سانتیمتر و $S=9\sqrt{6}$ سانتیمتر مربع باشد، اندازه‌های اضلاع مثلث را تعیین کنید.

۱.۵ـ تقسیم توافقی

۱.۵.۱ـ تعریف ـ می‌دانید که اگر پاره‌خط AB و عدد مثبت $k\neq 1$ مفروض باشند، درست دو نقطه، یکی بر AB و دیگری برامتداد آن، می‌توان یافت به قسمی که نسبت فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ A و B مساوی k باشد.

یکی‌از راههای تعیین‌دو نقطهٔ مزبور به صورتی است که در شکل (۱ـ۲۳) نموده شده است.



(شکل ۱-۲۳)

با این روش‌نقاط M و N مشخص می‌شوند چنان که:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=k \qquad (1)$$

در این‌صورت گوییم دو نقطهٔ M و N پاره خط AB را به‌نسبت توافقی k تقسیم می‌کنند. نسبت مزبور را هر عدد مثبت $k \neq 1$ می‌توان در نظر گرفت، بنابراین بی‌پایان جفت نقطه مانند M و N وجود دارند چنان‌که هرجفت از آنها پاره خط AB را به نسبت توافقی، اما هرجفت به نسبت معین، تقسیم می‌کنند.

معمولاً اندازه‌های پاره‌خطهایی را که ازطریق یك تقسیم توافقی بریك پاره خط مفروض پدید می‌آیند با توجه به جهت آنها مورد توجه قرار می‌دهند. در این‌صورت، اگر نقطهٔ M بر پاره‌خط AB و نقطهٔ N بر امتداد آن واقع باشد:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=+k \quad \text{و} \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-k$$

و بنابراین تقسیم توافقی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اگر پاره خط AB وعدد مثبت $k \neq 1$ مفروض باشند، نقاط M و N، که اولی برپاره‌خط AB و دیگری بر امتداد آن پاره‌خط انتخاب می‌شود، پاره خط AB را به نسبت توافقی k تقسیم می‌کنند هرگاه داشته باشیم:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=-k \qquad (۹-۱)$$

۲.۵.۱. قضیه - اگر دونقطهٔ M و N پاره‌خط مفروض AB را به‌نسبت توافقی تقسیم‌کرده باشند، دونقطهٔ A و B نیز پاره‌خط MN را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند.

برهان ـ اگر نقاط M و N پاره‌خط AB را به نسبت توافقی k تقسیم کرده باشند، به موجب تعریف:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$

اما $\overline{MA}=-\overline{AM}$ و $\overline{MB}=-\overline{BM}$ و... است، بنابراین تساوی بالا را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{-\overline{AM}}{-\overline{BM}}=-\frac{-\overline{AN}}{-\overline{BN}}$$

یا:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=-\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}$$

یا:

$$\boxed{\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=-\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}} \qquad (۱۰-۱)$$

از مقایسهٔ تساویهای (۱ـ۹) و (۱ـ۱۰) می‌توانیدید که تساوی اخیر نشان می‌دهد که نقاط A وB پاره‌خط MN را به نسبت توافقی تقسیم کرده‌اند.

۳.۵.۱ـ تعریف ـ اگر دو نقطهٔ M وN پاره‌خط مفروض AB را به نسبت توافقی معین تقسیم کنند، هریك از آنها را مزدوج توافقی دیگری نسبت به دو نقطهٔ A وB می گوییم. یعنی اگر دو نقطهٔ M و N به ترتیب برپاره‌خط AB و بر امتداد آن چنان اختیار شده باشند که:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$

باشد، نقطهٔ N را مزدوج توافقی M نسبت به دونقطهٔ A و B می گوییم، متقابلاً نقطهٔ M نیز مزدوج توافقی نقطهٔ N نسبت به دونقطهٔ A وB است. ازآنچه ذکرشدنتیجه می‌شود که مزدوج توافقی هر نقطه نسبت به دو نقطهٔ مفروض منحصر به یکی‌است (چرا؟).

از قضیهٔ قبل می‌توان نتیجه گرفت که اگر نقاط M و N مزدوج توافقی یکدیگر نسبت‌به دو نقطهٔ A وB باشند، نقاط A وB نیزنسبت به دو نقطهٔ M و N مزدوج توافقی یکدیگرند.

رابطه بین طولهای نقاطی که تقسیم توافقی می‌سازند ـ نقاط A ، B ، M وN به‌ترتیب با طولهای a ، b ، m و n روی محور x'ox قرارداشته ویك تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند لذا داریم:



$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \quad (۱)$$

طبق دستور اندازه جبری یك بردار روی یك محورخواهیم داشت:

$$\frac{a-m}{b-m}=-\frac{a-n}{b-n}$$

یا:

$$ab-an-bm+mn=-ab+am+bn-mn$$

ویا:

$$\boxed{2(ab+mn)=(a+b)(m+n)} \quad (۲)$$

برعکس هرگاه رابطه (۲) داشته باشیم از روی آن می‌توان رابطهٔ (۱) را ثـابت نمود. لذا

می‌توان گفت: شرط لازم و کافی برای آنکه چهار نقطه A ، B، M و N با طولهای a، b، m و n تشکیل یك تقسیم توافقی بدهند آنست که:

$$۲(ab+mn)=(a+b)(m+n)$$

حالات خاص- ۱- اگر نقطهٔ O مبدأ مختصـات وسط پاره خط AB باشد، طولهای A و B قرینه یکدیگر خواهند بود یعنی $a=-b$ ولذا خواهیم داشت :

$$\overline{OA}^۲=\overline{OB}^۲=\overline{OM}\cdot\overline{ON}$$

۱- رابطهٔ نیوتن (۳)
$$a^۲=b^۲=m\cdot n$$

۲- اگر نقطهٔ O، مبدأ مختصات بر یکی از چهار نقطه واقع باشد، مثلا بر A قـرار گیرد، دراینصورت داریم $a=\circ$ ، در نتیجه رابطهٔ (۲) به‌صورت:

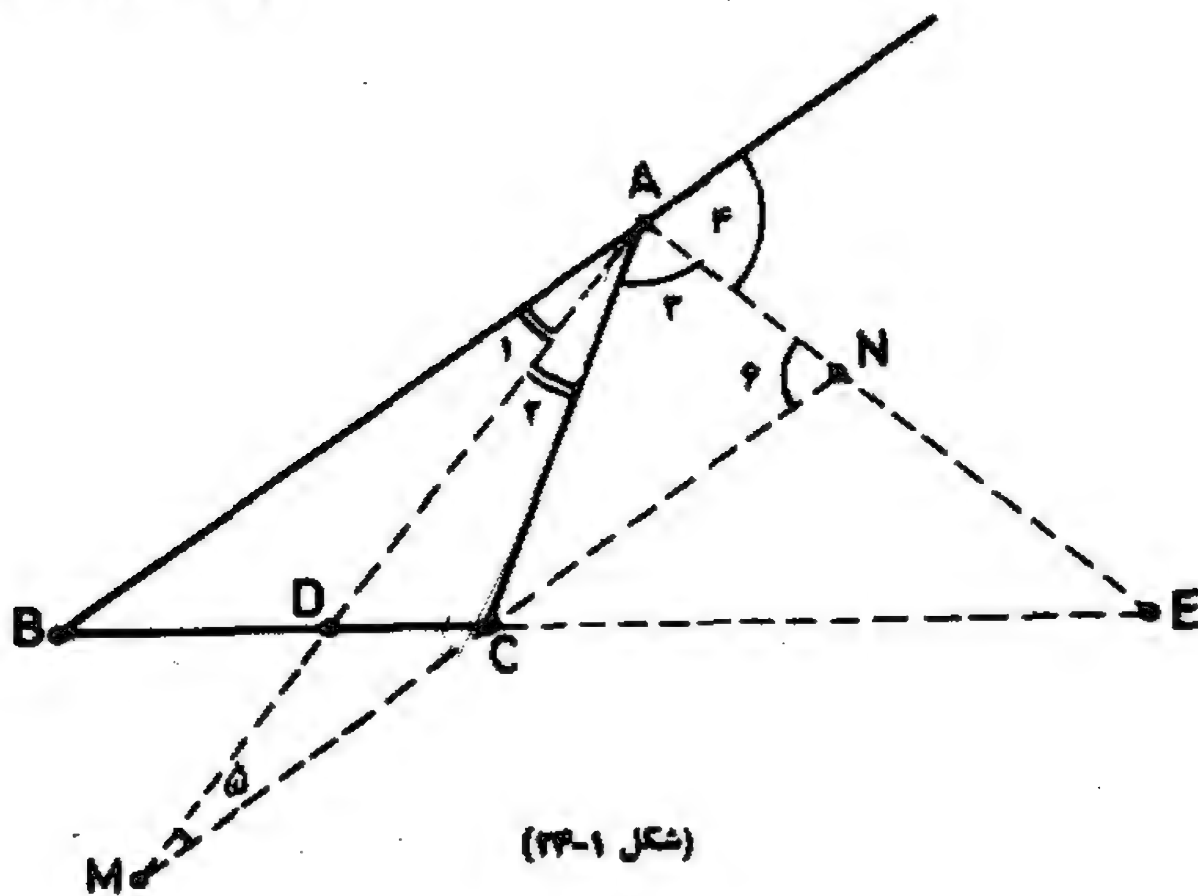
$$\frac{۲}{\overline{AB}}=\frac{۱}{\overline{AM}}+\frac{۱}{\overline{AN}}$$

ویا: رابطه دکارت (۴)
$$\frac{۲}{b}=\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}$$

۴۰۵۰۱- برای یادآوری و یا کاربردهای بعدی دو قضیه زیرا را اثبات می‌کنیم:

قضیه- در هر مثلث نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی نظیر یك رأس ضلع مقابل به آن رأس را به نسبت توافقی دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند. یعنی در شکل (۱-۲۴):

$$\frac{DB}{DC}=\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}$$



(شکل ۱-۲۴)

بنابراین :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_5=\hat{A}_1=\hat{A}_2 \Longrightarrow MC=AC\\ \hat{N}_6=\hat{A}_3=\hat{A}_4 \Longrightarrow CN=AC\end{array}\right\} \Longrightarrow MC=AC=NC$$

که در آن AD نیمساز زاویه درونی A و AE نیمساز زاویه برونی A در مثلث ABC هستند. $CN \| BA$ (فرض می‌کنیم $AB \neq AC$ می‌باشد.)

برهان ــ فرض می‌کنیم رأس C بین D و E است. از C خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا نیمسازها یا امتداد آنها را در M و N (مطابق شکل) قطع کند. داریم:

$$\Delta DBA \sim \Delta DCM \Longrightarrow \frac{AB}{MC}=\frac{DB}{DC}\ \text{و}$$

$$\Delta EBA \sim \Delta ECN \Longrightarrow \frac{AB}{CN}=\frac{EB}{EC}$$

و درنتیجه :

$$\frac{DB}{DC}=\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{AC}$$

عکس قضیه ــ در مثلث ABC نقطه‌های D و E ضلع BC را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند و AD و AE برهم عمودند (نقطه D بین B و C، و نقطه E درخارج آنها است). آنگاه AD و AE نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی رأس A هستند.

برهان ــ در شکل (۱ــ۲۵) از نقطهٔ C خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا خطوط AD و AE را در M و N قطع کنند مطابق شکل چون:

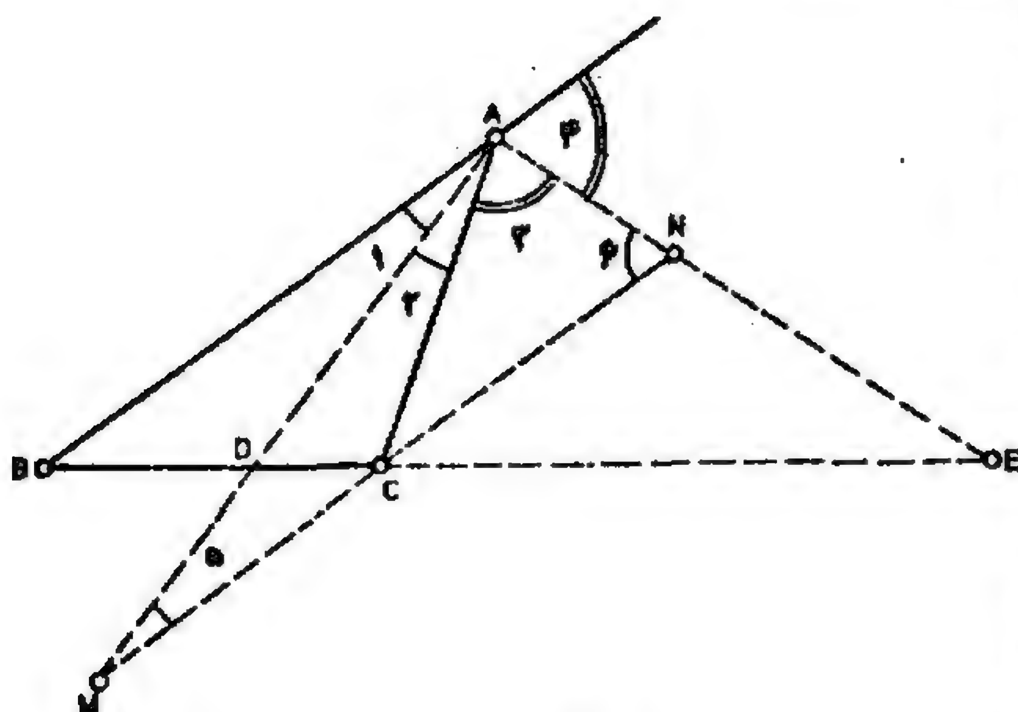
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{MC}\\[2mm] \dfrac{EB}{EC}=\dfrac{AB}{CN}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{AB}{MC}=\frac{AB}{NC}$$

پس $CM=CN$ در نتیجه AC میانه نظیر وتر مثلث قائم‌الزاویه AMN می‌باشد و از آنجا:

$$AC=CN=MC$$

بنابراین :

$$\hat{A}_1=\hat{M}_5=\hat{A}_2$$



(شکل ۱ــ۲۵)

و در نتیجه $\hat{A}_1=\hat{A}_2$. بنابراین AD نیمساز زاویه درونی رأس A و خط AE که برآن عمود است نیمساز زاویه برونی همان رأس می‌باشند.

تبصره- قضیهٔ فوق را بصورت زیر نیز می‌توان بیان نمود:

هرگاه چهار خط متقارب بر چهار نقطهٔ یك تقسیم توافقی بگذرند و دو خط غیر مجاور از این چهار خط بر هم عمود باشند این دو خط عمود بر هم نیمسازهای داخلی و خارجی زوایای بین دو خط دیگرند.

تمرین

۱- پاره‌خط AB را به اندازهٔ ۳ سانتیمتررسم کرده وآن را با دونقطهٔ M و N به‌نسبت توافقی ۳ تقسیم کنید. (مسئله چند جواب دارد؟)

۲- تحقیق کنید که در مسئلهٔ قبل نقاط M و N پاره‌خط AB را به پاره خطهایی با چه اندازه‌هایی تقسیم می‌کنند؟ ($AM>BM$ اختیار کنید.)

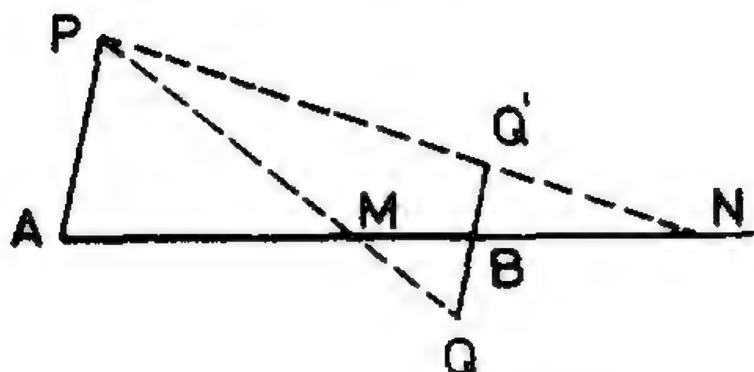
۳- در مسئلهٔ ۱ نقاط A وB پاره‌خط MN را به چه نسبت توافقی تقسیم می‌کنند؟

۴- سه نقطهٔ متوالی A وC وB بریك محور اختیار شده‌اند چنان‌که ۲$=AC$ و۳$=CB$ سانتیمتر است. نقطهٔ D مزدوج توافقی نقطهٔ C را نسبت به دونقطهٔ A وB مشخص کنید. نقاط C وD پاره‌خط AB را به چه‌نسبت‌توافقی‌تقسیم می‌کنند؟ نقاط A وB پاره‌خط CD را به چه نسبت توافقی تقسیم می‌کنند؟

۵- ثابت کنید اگر دو دایره دارای مماسهای مشترك خارجی و داخلی باشند، نقاط تلاقی مماسها با خط‌المرکزین،این‌پاره‌خط‌را به‌نسبت توافقی دو شعاع دایره‌ها تقسیم می‌کنند.

۶- مثلثی رسم کنید که شعاع دایره محیطی آن ۳ سانتیمتر و ضلع BC آن ۴ سانتیمتر و اندازه‌های دو ضلع دیگر آن به نسبت ۳ و۴ باشند.

۶.۵.۱- مسئله- نقطهٔ M برپاره‌خط AB (یا برامتداد آن پاره‌خط) مفروض است ، مزدوج توافقی آن را نسبت به دو نقطهٔ A وB مشخص کنید.



(شکل ۱-۲۶)

حل- از دو نقطهٔ A وB دوخط موازی یکدیگر که در امتداد AB نباشندرسم می‌کنیم و بریکی ازآنها، مثلاً براولی، پاره‌خط AP را به اندازهٔ اختیاری جدا می‌کنیم شکل (۱-۲۵)، نقطهٔ P را به نقطهٔ M وصل کرده و خط حاصل را امتداد می‌دهیم تا خط دوم را در نقطهٔ Q قطع کند. برهمین خط و درجهت دیگرپاره‌خط BQ' را مساوی BQ جدا می‌کنیم و نقاط P وQ' را به‌هم می‌پیوندیم، پاره‌خط PQ' خط AB را در نقطهٔ مطلوب N قطع می‌کند.

مسئله درچه‌صورت جواب دارد؟

خواندنی ۱

غیاث الدین جمشید کاشانی

غیاث الدین جمشید، پسرمسعود، از ریاضی دانان نامی قرن هشتم و اوایل قرن نهم هجری‌شمسی(قرنهای چهاردهم وپانزدهم میلادی) است. به‌سال ۷۶۷ ه . ش درکاشان‌متولد شد و به‌سال ۸۵۸ درسمرقند روی درنقاب خاك نهفت. با این که عمری‌کوتاه داشت، در زمان زندگی خود شهرتـی بلند یافت. پدرونیای او پزشك بودند، اما اوروی به ریاضیات آورد وازسرآمدان این علم شد، درحساب وهندسه، به ویژه درهیئت ونجوم، که به‌دلایلی‌نزد پادشاهان‌کشورهای اسلامی ارج بسیارداشت، آثارمهم ازخود باقی‌گذاشت. ازمهمترین‌آثار اوپی‌ریزی رصدخانهٔ سمرقند بود.

جمشید و خواهرزاده‌اش معین‌الدین، که وی نیز از ریاضی دانان عصر خود بود ، به دعوت میرزا الغ‌بیك. پادشاه‌گورکانی به سمرقند رفتند. الغ‌بیك که پادشاهی علـم دوست وعالم‌پروربود، وخود نیزازعلوم زمان بهرهٔ‌کافی داشت، گروهی انبوه ازعالمان زمان را در دربار خودگردآورده بود و هر جا سراغ از دانشمندی می‌گرفت اورا هم به پایتخت خود می‌خواند. دانشمند تازه وارد ازآزمونهای متعدد می‌گذشت و اگرکامیاب می‌شد، در سلك همتایان خود در دربار پادشاه تیموری درمی‌آمد.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، که در نوشته‌های غربیان به «الکاشی» معروف است، از همهٔ امتحانها، سربلند بیرون‌آمد ودیری نگذشت‌که به مناسبت احاطه برعلم، ازنزدیکان دربار پادشاهی شد وازحیث مقام، بعد ازموسی بن محمد بن قاضی محمود، مشهور به قاضی زادهٔ رومی،که برمیرزا الغ‌بیك سمت استادی داشت وازاین روی درصدر دانشمندان درباربود، قرارگرفت.

جمشید به‌دستورالغ‌بیك به تأسیس رصدخانهٔ سمرقند، که بنایی عظیم بود، پرداخت اما چون درجوانی درگذشت، قاضی‌زادهٔ موصوف دنبالـهٔ کاراوراگرفت وبعد ازاوعلی بن

محمد، ملقب به علاء الدین قوشچی، ومعروف به ملاعلی قوشچی، ونیز بـه فاضل قوشچی، کاررا به‌پایان برد. این رصدخانه بر اثر ویرانیهای زمان درخاك مدفون شد ولی درسالهای اخیرباستان شناسان شوروی وازبك درحفاریهایی کـه در قسمت شمالی شهر سمرقند انجام دادند بخشی ازآن را ازخاك بیرون‌آورده ووسایل‌علمی‌راکه درآن یافته‌اند درموزهٔ خاصی که درهمان محل‌ساخته شده‌است قرارداده‌اند. کارحفاری دراین محل هنوزادامه دارد.

درجریان زندگی‌کاشانی دشواریهایی نیز پدیدآمد. چنان‌که دراثر سعایت حسودان وسخن‌چینان پادشاه تیموری نسبت به اوبدبین شد و دانشمند مزبور را درپایان عمرآزرده‌خاطر ساخت.

از کارهای مهم‌کاشانی محاسبهٔ نسبت محیط دایره به قطرآن است که آن را هم با حساب شصت‌گانی به‌صورت $\frac{۴۴}{۲۱۶۰۰۰}+\frac{۲۹}{۳۶۰۰}+\frac{۸}{۶۰}+۳$ ، و هم بـا حساب دهدهی به‌دست‌آورد. نتیجهٔ‌کاراوبا حساب دهدهی تا ۱۳ رقم دقت دارد.

در دایرة المعارف بریتانیکا دراین مورد از یك عدد باور نکردنی یاد شده است و نوشته‌اندکه غیاث‌الدین جمشید نسبت محیط به قطردایره را به‌کمك یك ۸۰۰ میلیون‌ضلعی منتظم به‌دست‌آورد.

ازجمله‌کتابها ورساله‌هایی‌که تألیف‌آنهارا به‌این دانشمند نسبت داده‌اند، عبارتنداز:

ـ زیج خاقانی درتکمیل زیج‌ایلخانی کـه نام آن به مناسبت شهرتی است کـه پدر الغ‌بیك به‌عنوان خاقان داشته است.

ـ رسالهٔ محیطیه دربارهٔ نسبت محیط دایره به قطرآن ـ سُلم‌السماء یا رسالهٔ کمالیه دربارهٔ بعدها وقوسها ـ رسالهٔ وتر وجیب ـ زیج تسهیلات ـ رساله‌ای دربارهٔ آلات رصد وشرح‌آنها ـ نوادرسمرقند ـ نزهت‌الحدایق ـ مفتاح الحساب ـ تلخیص‌المفتاح که‌خلاصهٔ مفتاح‌الحساب است ـ تنویرالمصباح فی‌تلخیص المفتاح، که شاید نام دیگری برای کتاب قبلی است، وتفسیرالقرآن.

متن عربی‌کتاب مفتاح‌الحساب کاشانی را اخیراً به‌صورت عکسبرداری از یك نسخهٔ قدیمی منتشرکرده‌اند وهم ترجمهٔ‌آن به‌زبان روسی درمسکوچاپ شده‌است.

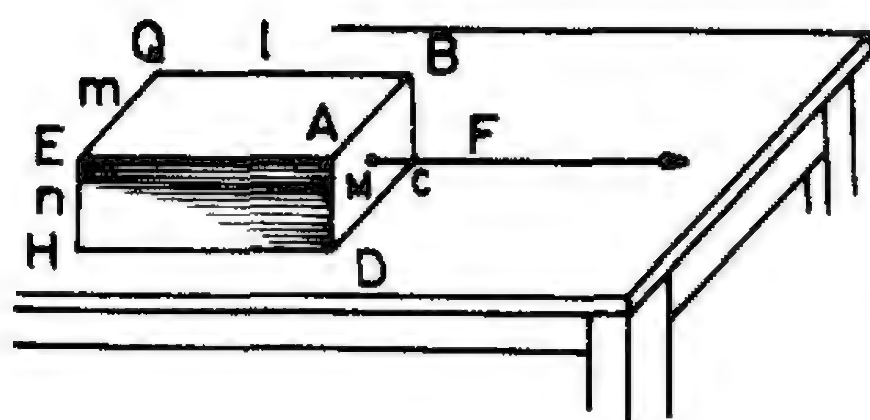
غیاث‌الدین جمشیدآلات رصد را می‌شناخت وبه‌کار می‌بـرد و خود نیز آلت رصد مخصوصی به نام «طبق‌المناطق» اختراع کردکه بعدها نام‌آن به «جام جم» تبدیل شد.

فصل دوم

بردار

۱.۲ـ شناخت بردار

۱.۱.۲ـ کمیت یا **چندی** چیزی است که قابل افزایش یا کاهش باشد، مانند درازا، مساحت، حجم، زمان، اندازهٔ زاویه، وزن، سرعت حرکت ونیرو.



(شکل ۲ــ۱)

۲.۱.۲ـ بردار ــ جسمی به شکل مکعب مستطیل، به ابعاد l و m و n سانتیمتر و به وزن p کیلو گرم، در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم رشتهٔ نخی به‌نقطهٔ M، محل برخورد قطرهای مستطیل ABCD از آن جسم، (شکل ۲ــ۱) بسته و جسم را به وسیلهٔ نخ با نیرویی مساوی F بکشیم. دراین مثال با دونوع کمیت سروکار خواهیم داشت. از نمونه‌های کمیت اول‌طول وعرض وارتفاع‌جسم، (درازا)، مساحت هریك ازوجوه جسم، (سطح) وحجم جسم، (حجم) با سانتیمتر و سانتیمترمربع و سانتیمترمکعب بیان می‌شوند. این اندازه‌ها به‌جای مکعب یا به طرزقرار گرفتن‌آن برروی میز بستگی‌ندارند وجسم را درهروضعی قراردهیم، دراندازه ووضع آنها تغییری‌پدید نمی‌آید. این‌نوع کمیتها را کمیتهای عددی یا اسکالرمی‌نامیم.

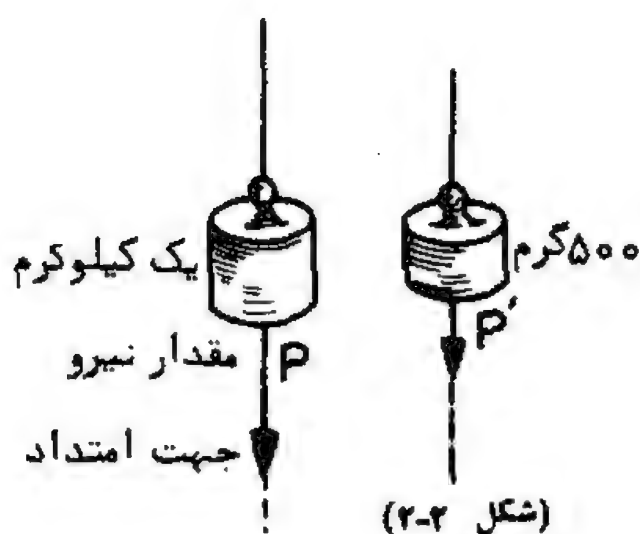
نمونهٔ‌کمیت نوع دوم: اولا وزن جسم است که اثر نیروی جاذبهٔ زمین است، (نیروی ثقل یاسنگینی) وهمیشه درامتداد خط شاغولی، یعنی در امتداد قائم اثر می‌کند ومتوجه مرکز زمین است؛ ثانیاً نیروی F است که جسم را باآن می‌کشیم. اگراین نیرو خیلی کوچك باشد، جسم‌از جای خود حرکت نمی‌کند، واگر به‌اندازهٔ‌کافی باشد، جسم به‌حرکت درمی‌آید.

اگرنیروی F درامتداد عمود بروجه ABCD مستطیل اثرکند، یعنی اگر نخ را در امتداد عمود برآن وجه بکشیم، جسم نیزدرهمان امتداد حرکت می‌کند، امااگرنخ را درامتداد دیگری بکشیم، جسم درهمان امتداد جا به جا می‌شود.

کمیتهایی مانند وزن و نیرو را، که علاوه بر مقدار معین، امتداد وجهت معین نیز دارند، کمیتهای برداری می‌گوییم. باکمیتهای برداری بیشتر درفیزیك ومکانیك برخورد می‌کنیم.

۳.۱.۲- کمیتهای عددی با عددهای حقیقی و برحسب واحد مربوط بیان می‌شوند. مانند: دو سانتیمتر، ۳/۵ سانتیمترمربع، ۲ ساعت و ۱۲ دقیقه، وبالاخره ′۱۵ و °۴۰.

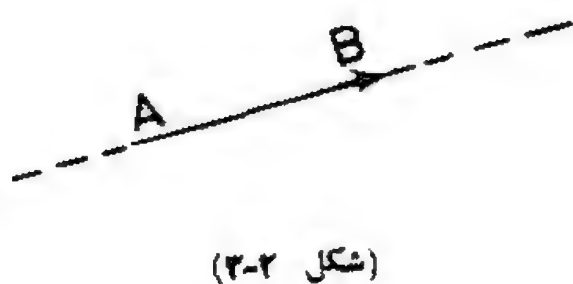
کمیتهای برداری به‌صورت هندسی نمایش داده می‌شوند یعنی به‌شکل پاره خطی که امتداد وجهت واندازهٔ معینی داشته باشد.



(شکل ۲-۲)

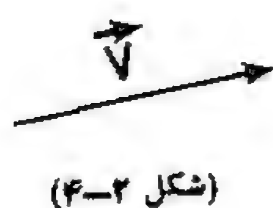
در شکل (۲-۲) دو وزنهٔ یك کیلوگرمی ونیم کیلوگرمی درحالت‌آویخته به دستگاهی دیده می‌شوند. خطهای راستی که درامتداد قائم‌رسم شده‌اند جهت وزن راکه متوجه مرکززمین است مشخص می‌سازند ومقدار وزن با اندازهٔ پاره خطهایی‌که به پیکانها ختم شده‌اند نمایش داده شده است.

تعریف ـ هرگاه دونقطهٔ متمایز یا نامتمایز $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را درنظر بگیریم و $\mathbf{A}$ را نقطه آغاز و $\mathbf{B}$ را نقطه پایان بنامیم، این دونقطه باترتیب فوق یك بردار تعریف می‌کنندکه با نماد $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ نمایش داده می‌شود. فاصلهٔ میان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را اندازه بردار $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ می‌نامند و با نماد $\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right|$ نمایش می‌دهند. اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ متمایز باشند آنگاه خطی که آن دونقطه را شامل است امتداد بردار $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$، و جهت از $\mathbf{A}$ به $\mathbf{B}$ نیز جهت‌بردار $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ نامیده می‌شوند. چنانچه $\mathbf{A}$و$\mathbf{B}$ متمایز نباشند، بردار $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ را بردار صفرمی‌نامیم و برای‌آن جهت و امتداد تعریف نمی‌کنیم. برای نمایش هندسی بردار دو نقطه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را بهم وصل و نقطه $\mathbf{B}$ را با پیکان مشخص می‌کنیم (شکل ۲-۳).



(شکل ۲-۳)

گاهی بردار را با یك حرف‌که بالای آن علامت پیکان می‌گذاریم نمایش می‌دهیم مانند بردار $\overrightarrow{\mathbf{V}}$ در شکل (۲-۴).



(شکل ۲-۴)

۲.۲- ویژگیهای بردارها

۱.۲.۲- همراستایی دو بردار ـ دو بردار را همراستا گوییم هرگاه امتدادهای متوازی داشته باشند، مانند بردارهای $\overrightarrow{\mathbf{V}}$ و $\overrightarrow{\mathbf{W}}$ در شکل (۲-۵) و یا بردارهای $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ و $\overrightarrow{\mathbf{S}}$ در شکل (۲-۶)



(شکل ۲-۶)

(شکل ۲-۵)

۲.۲.۲- برابری دو بردار - دو بردار را برابرگوییم هرگاه یا هردوصفر باشند و یا هم‌جهت و هم‌اندازه باشند. اگر $\vec{V}_1$ با $\vec{V}_2$ برابر باشد می‌نویسیم: $\vec{V}_1=\vec{V}_2$

بسادگی دیده می‌شودکه:

(الف): هر برداربا خودش برابر است (ویژگی بازتابی).

(ب): اگر $\vec{V}_1$ با $\vec{V}_2$ برابر باشد، $\vec{V}_2$ هم‌با $\vec{V}_1$ برابر است (ویژگی تقارنی).

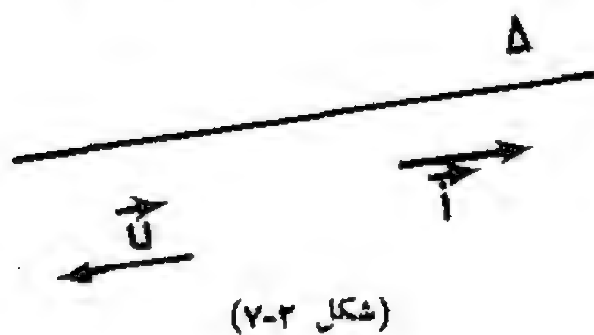
(ج): اگر $\vec{V}_1$ با $\vec{V}_2$ و همچنین $\vec{V}_2$ با $\vec{V}_3$ برابر باشد، آنگاه $\vec{V}_1$ با $\vec{V}_3$ برابر است (ویژگی ترایایی).

نتیجه- برابری بردارها یك رابطه هم‌ارزی است.

توجه- برابری بردارها در فیزیك یا مکانیك گاهی بگونه دیگر نیز تعریف می‌شود:

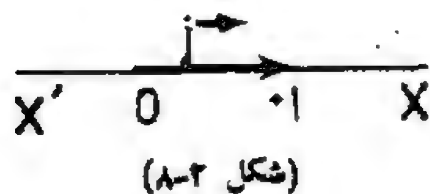
قرارداد- برداری‌که اندازه آن صفر است با نماد $\vec{o}$ نمایش داده می‌شود.

برداریکانی - هر بردار به اندازه ۱ را یك بردار یکانی‌می‌نامند. اگر امتداد بردار یکانی $\vec{i}$ موازی خط Δ باشد، $\vec{i}$ را بردار یکانی‌راستای Δ گوییم، با درنظرگرفتن برابری‌بردارها می‌توان گفت‌که هر راستا دو بردار یکانی داردکه هم جهت نیستند، مانند بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{u}$ برای راستای Δ (شکل ۲-۷).



(شکل ۲-۷)

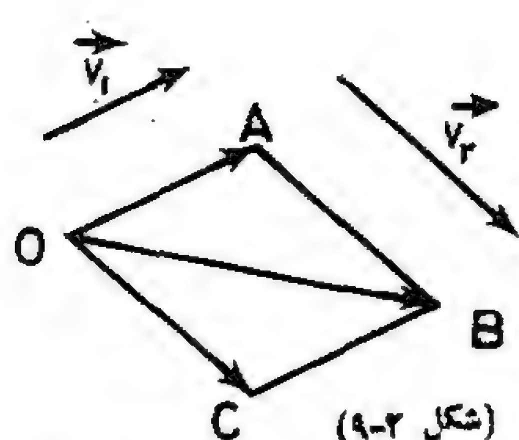
یك بردار یکانی که آغازآن برصفر و پایان آن بر ۱+ یك محور منطبق باشند، بردار یکانی آن محور نامیده می‌شود. هرمحور تنها یك بردار یکانی دارد، مانند بردار یکانی $\vec{j}$ درشکل (۲-۸).



(شکل ۲-۸)

۳.۲- عملهایی با بردارها

۱.۳.۲- جمع دوبردار - هرگاه دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ داده شده باشند، از یك نقطه O



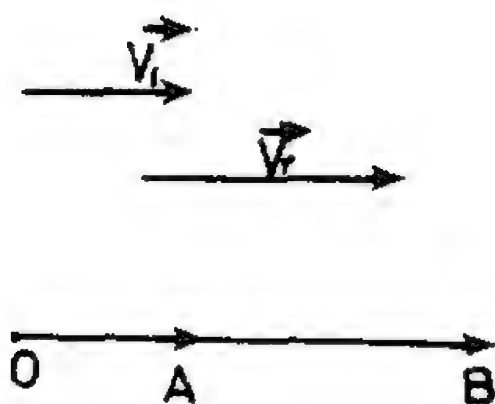
(شکل ۲-۹)

بردار $\overrightarrow{OA}$ را برابر با $\vec{V}_1$ و از نقطه A بردار $\overrightarrow{AB}$ را برابر با $\vec{V}_2$ رسم می‌کنیم. بردار $\overrightarrow{OB}$ را مجموع دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ می‌نامیم.

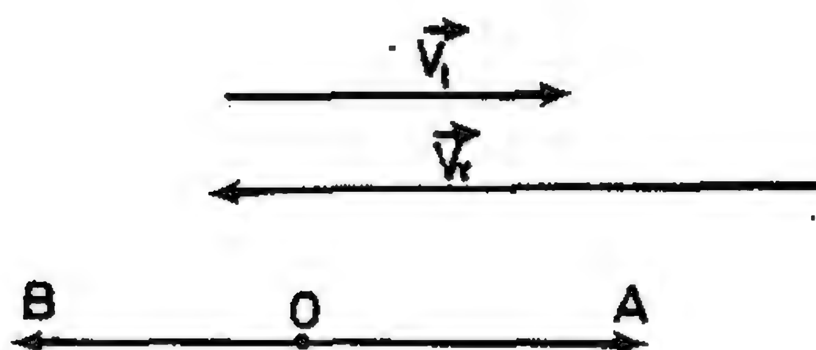
در شکل (۲-۹) دیده می‌شود که اگر $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ همراستا نباشند، آنگاه OB قطر متوازی‌الاضلاع OABC است و بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AB}$ به‌ترتیب با $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ برابرند در این مورد به اختصار می‌گوئیم: مجموع بردارهای $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ قطر متوازی‌الاضلاعی است که بر آن دو بردار بنا می‌شود.

در شکلهای (۲-۱۰) و (۲-۱۱) دیده می‌شود که اگر $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ همراستا باشند، مجموع آنها نیز (اگر صفر نشود) با آنها همراستا است و داریم:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$$



(شکل ۲-۱۰)



(شکل ۲-۱۱)

۲.۳.۲- مجموع چند بردار- از ویژگیهای بردارها چنین برمی‌آید که هرگاه چند بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ و ... و $\vec{V}_n$ را با هرترتیبی باهم جمع‌کنیم حاصل جمع یکی است؛ یعنی مثلا اگر $n=4$ باشد:

$$((\vec{V}_1+\vec{V}_2)+\vec{V}_3)+\vec{V}_4=((\vec{V}_3+\vec{V}_2)+\vec{V}_1)+\vec{V}_4=$$

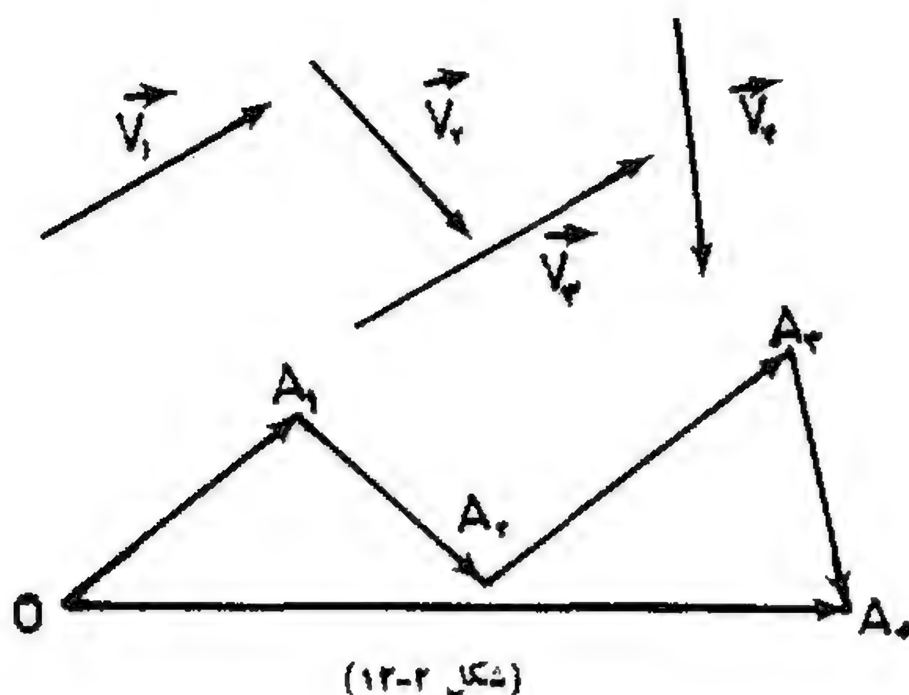
$$((\vec{V}_4+\vec{V}_1)+\vec{V}_2)+\vec{V}_3=\cdots$$

بنابراین بی‌آنکه اشکالی پیش‌آید می‌توان پرانتزها را برداشت و نوشت:

$$\vec{V}_1+\vec{V}_2+\cdots+\vec{V}_n$$

و برای بدست‌آوردن حاصل‌جمع چند بردار به روش زیر عمل می‌کنیم:

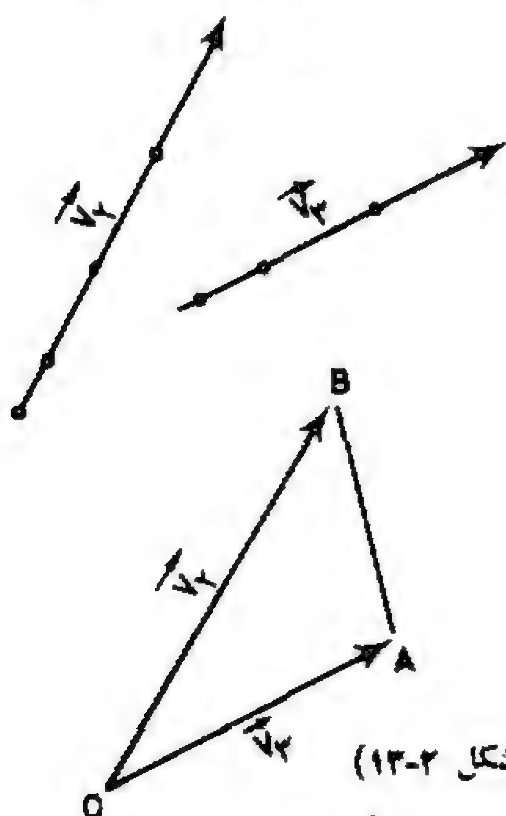
از یك نقطه O بردار $\overrightarrow{OA_1}$ را برابر با $\vec{V}_1$ و سپس بردار $\overrightarrow{A_1A_2}$ را برابر با $\vec{V}_2$ و بردار $\overrightarrow{A_2A_3}$ را برابر با $\vec{V}_3$ و همینطور پیش می‌رویم تا در پایان بردار $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ را برابر با $\vec{V}_n$ رسم می‌کنیم. بردار $\overrightarrow{OA_n}$ برابر با مجموع بردارهای $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ و... و $\vec{V}_n$ خواهد شد (شکل ۲-۱۲).



(شکل ۲-۱۲)

۳.۳.۲- تفاضل دو بردار - هرگاه مجموع دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ برابر با $\vec{V}_3$ شود، بردار $\vec{V}_1$ را تفاضل دو بردار $\vec{V}_3$ ، $\vec{V}_2$ می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_3 - \vec{V}_2$$



(شکل ۲-۱۳)

چنانچه $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_2$ داده شده باشند، برای‌یافتن تفاضل آنها از یك نقطه O دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را به‌ترتیب برابر با بردارهای $\vec{V}_3$ و $\vec{V}_2$ رسم می‌کنیم (شکل ۲-۱۳). بردار $\overrightarrow{BA}$ برابر با $\vec{V}_3 - \vec{V}_2$ می‌باشد، زیرا:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$$

بدیهی است که تفاضل $\vec{V}_2$ از $\vec{V}_3$ برابر با بردار $\overrightarrow{AB}$ است و بنابراین:

$$\vec{V}_3 - \vec{V}_2 = -(\vec{V}_2 - \vec{V}_3)$$

۴.۳.۲- ضرب عدد در بردار- بردار $\vec{V}$ و عدد حقیقی a را در نظر می‌گیریم . بردار $\vec{W}$ را با ویژگیهای زیرمی‌سازیم :

(الف): اندازه $\vec{W}$ برابر با $|a|\cdot|\vec{V}|$ می‌باشد ؛ یعنی :

$$|\vec{W}|=|a|\cdot|\vec{V}|$$

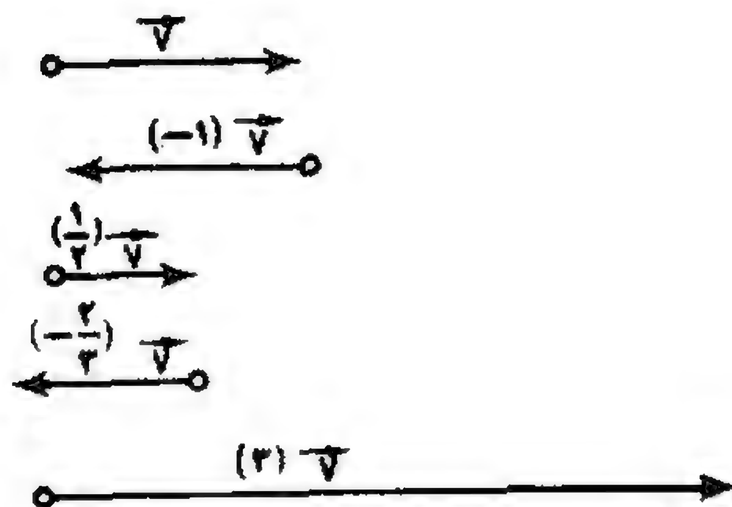
(بنابراین اگر $\vec{V}=\vec{o}$ ویا $a=o$ باشد، آنگاه $\vec{W}=\vec{o}$ می‌باشد.)

(ب): اگر $|\vec{V}|$ و a هیچکدام صفر نباشند، بردارهای $\vec{V}$ و $\vec{W}$ همراستایند.

(ج): بردارهای $\vec{V}$ و $\vec{W}$ هم‌جهت هستند اگر وتنها اگر a مثبت باشد.

بردار $\vec{W}$ که دارای ویژگیهای (الف) و (ب) و (ج) می‌باشد، حاصلضرب عدد a در بردار $\vec{V}$ نامیده و با $a\vec{V}$ نمایش داده می‌شود، یعنی $\vec{W}=a\vec{V}$

مثال- در (شکل ۲-۱۴) بردار داده شده $\vec{V}$ درعددهای ۱- و $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۲}{۳}$ و ۳ ضرب شده است:



(شکل ۲-۱۴)

هر گاه بردار یکانی $\vec{i}$ و بردار $\vec{V}$ همراستا باشند، آنگاه یك عدد حقیقی k چنان یافت می‌شود که $\vec{V}=k\vec{i}$

اگر $\vec{i}$ و $\vec{V}$ هم‌جهت باشند k را برابر $|\vec{V}|$ وگرنه k رابرابر $-|\vec{V}|$ می‌گیریم. در هر حالت بسادگی دیده می‌شود که $\vec{V}=k\vec{i}$ (چرا؟)

تمرین

۱ـ نقطه‌های A و B و C و D چهار رأس متوالی یك چهارضلعی هستند. مجموعهای زیررا بدست آورید :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}\ ,\quad \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\ ,$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\ ,\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

۲ـ نقطه‌های A و B و M چنانند که $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}$. وضع نسبی نقطه‌ها را بیان کنید .

۳ـ درمسئله قبل اگر $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ ، نقطه‌های A و M و B نسبت بهم چه وضعی دارند ؟

۴ـ نقطه‌های A و B و C چنانند که $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$. آیا در اینصورت لزوماً $AB=AC+BC$ می‌باشد؟ درچه صورت رابطه اخیر برقرار است؟

۵ـ نقطه‌های M و N و P داده شده‌اند. مجموع $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}$ را مشخص کنید .

۶ـ اگر $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{o}$ باشد، نقطه‌های A و B و C چه وضعی‌نسبت‌بهم‌دارند؟

۷ـ نشان دهید اگر $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ باشد، آنگاه $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ خواهد بود.

۸ـ نقطه‌های A و B و C و D داده شده‌اند. نشان دهید.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$$

۹ـ برمحور $x'Ox$ با بردار یکانی $\overrightarrow{i}$ ، بردارهای $3\overrightarrow{i}$ و $-4\overrightarrow{i}$ را در نظر می گیریم .

اولا اندازه‌های دوبردار مزبور را تعیین‌کنید. ثانیاً اندازه‌های جبری هریك از این‌دو بردار را درمقایسه با محور $x'Ox$ تعیین‌کنید.

۱۰ـ برمحور $x'Ox$ با بردار یکانی $\overrightarrow{u}$ ، نقطه‌های A و B را در دو طرف O چنان می‌گیریم که $OA=4$ و $OB=2$ و بردار $\overrightarrow{AB}$ با $\overrightarrow{u}$ هم‌جهت باشد. هریك ازبردارهای

$\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ را برحسب $\overrightarrow{u}$ بنویسید. اندازه‌هـای جبری این بردارها را تعیین کنید.

۱۱- بردار $\overrightarrow{V}$ را به اندازه ۲ سانتی‌متر درنظر گرفته و بردارهـای $-\overrightarrow{V}$ و $۳\overrightarrow{V}$ و $-۲\overrightarrow{V}$ و $\frac{۳}{۴}\overrightarrow{V}$ و $\sqrt{۲}\overrightarrow{V}$ را رسم کنید.

۱۲- درصورتی که $\overrightarrow{OA} = -۳\overrightarrow{OB}$ باشد، وضع نسبی نقاط مزبور را بیان کنید.

۱۳- اگر $\overrightarrow{MN} = ۲\overrightarrow{AB}$ باشد، وضع نسبی نقطه‌های A و B و N و M را بیان کنید.

خواندنی ۲

خوارزمی

ابو عبدالله محمدبن موسی خوارزمی، از بزرگترین ریاضی دانان ایران و اسلام در قرن دوم هجری بوده‌است. تولد اورا، احتمالا، درنزدیکی بغداد می‌دانند و ازتاریخ دقیق آن اطلاعی دردست نیست. وفاتش را درحدود سال ۲۲۵ هجری شمسی نوشته‌اند.

خوارزمی درزمان‌خلافت مأمون (۱۹۲-۲۱۲ هجری) ومعتصم (۲۱۲-۲۲۱هجری) دربغداد می‌زیسته و دربیت الحکمهٔ مأمون افاضه می کـرد و از منجمان دربار آن دو خلیفه بوده است.

آثارخوارزمی درریاضیات ونجوم بسیارمهم، نبوغش درعلم بی‌نظیر وشهرت علمیش جهانگیربوده‌است. خوارزمی مانندهمهٔ دانشمندان شرقی زمان به زبان عربی می‌نوشت، ومؤلف «کتاب‌الجبر والمقابله» و «کتاب‌الجمع والتفریق» است. آثار او به لاتین ترجمه شد و بزرگترین مترجم آنها «ژراردکرمونایی» بودکه اصولاً درانتقال علم از شرق به‌غرب نقشی اساسی ایفاکرده است.

واژه‌های Algebre و Algorithme (فن محاسبه) مقتبس ازنام‌کتاب‌الجبر- و المقابلهٔ او و نام خود او تأثیر وی را در ریاضیات غرب جاودانی ساخته‌اند. ترجمه‌های کتاب‌الجبر ازلاتین به زبانهای زندهٔ اروپایی موجود است واخیراً آن را به‌فارسی ترجمه کرده‌اند.[1]

درنجوم زیج خاصی به نام «زیج خوارزمی» تنظیم کرد و در مقدمهٔ آن اصول نجوم نظری را مدون ساخت.

اصل‌کتاب وی در ارقام هندسی از میان رفته وفقط ترجمهٔ لاتینی برخی از قسمتهای آن باقی مانده است. چنین می‌نماید‌که زیج خوارزمی برآثاردیگر اومقدم بوده باشدوپس

۱ــ ترجمهٔ دکتر حسین خدیو جم

از آن به تألیف جبر وبعداً به نوشتن حساب اقدام شده باشد.

دربارهٔ اسطرلاب (= اصطرلاب) که دقیق ترین وسیلهٔ ارصاد قدیم بوده است. دو کتاب به وسیلهٔ خوارزمی نوشته شده بود. یکی «کتاب عمل‌الاسطرلاب» در طرز کار آن اسباب ودیگری «کتاب‌العمل بالاسطرلاب» درطرز کار کردن با آن. متأسفانه این‌دو کتاب‌از بین رفته‌اند وفقط درآثاردیگران به‌آنها اشاره شده است.

خوارزمی اطلسی مشروح از نقشه‌های زمین وآسمان فراهم‌آوردکه نالنیو آن را به ایتالیایی ترجمه‌کرده ودررم به چاپ رسانیده است.

فصل سوم

تبدیلهای مهم هندسی

۱.۳- تبدیل

در این فصل تبدیلهای مهم هندسی درصفحه را بررسی می‌کنیم و در برخی از جاها به تبدیل نظیر در فضای سه بعدی هم اشاره می‌کنیم. (تصویر بر صفحه که یك تبدیل فضایی است بطور مشروح بررسی می‌شود.)

۱.۱.۳- تعریف- در یك صفحه π تبدیل T عبارت از قرارداد یا قانونی است‌که بموجب‌آن به هرنقطه M از π یك نقطه و تنها یك نقطه مانند M' در π متناظر می‌شود. در اینصورت می‌نویسیم $T:\pi\to\pi$ ومی‌خوانیم«T تبدیلی است از π به π». همچنین اگربا تبدیل T نقطه M بانقطه M' متناظرشود، مینویسیم $T(M)=M'$ و می‌گوییم T نقطه M را به M' تبدیل می‌کند یا M' تبدیل یافته M با تبدیل T می‌باشد.

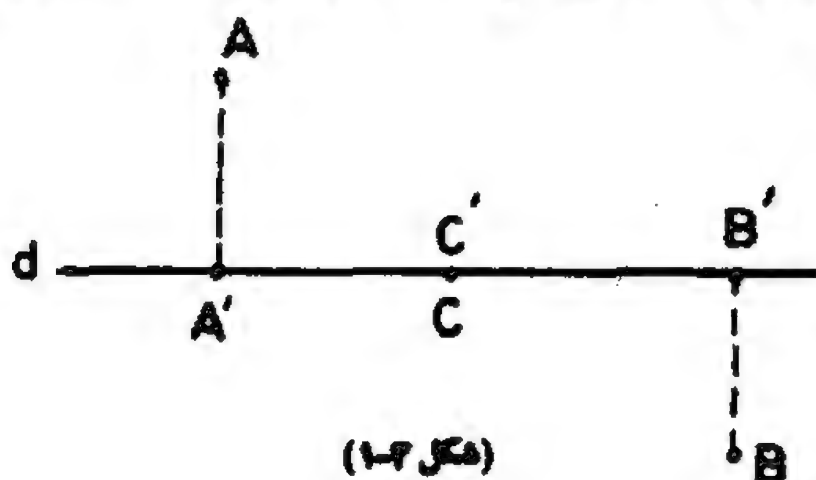
تبدیل در فضا را نیز بهمین‌روش تعریف می‌کنیم.

۲.۱.۳- تبدیل یافته یك شكل- هر گاه F شکلی از صفحه π و T تبدیلی درآن صفحه باشد، مجموعه همه تبدیل یافته‌های نقطه‌های F شکلی خواهد بود مانند F' که تبدیل یافته F می‌نامیم و می‌نویسیم $T(F)=F'$.

در این فصل‌تبدیلهایی را بررسی می‌کنیم که درطبیعت با آنها بیشتر برخورد می‌شود.

۲.۳- تصویر

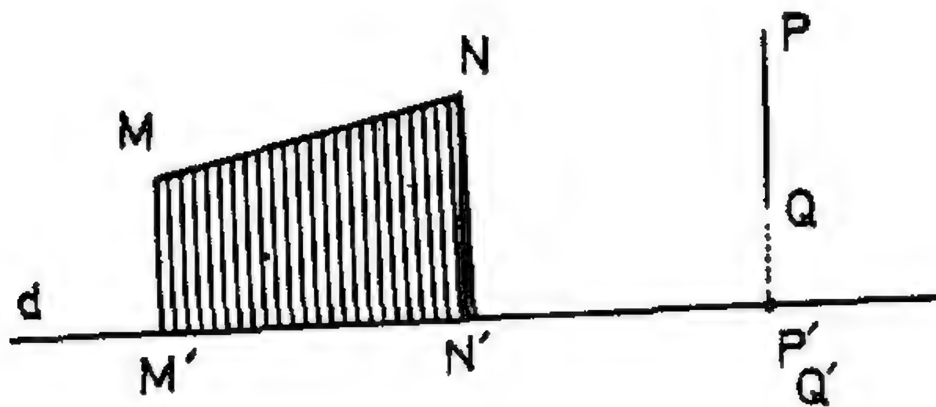
۱.۲.۳- تصویر برخط - خط ثابت d را درنظر می‌گیریم. تبدیل T را چنان تعریف می‌کنیم که هرنقطه M را به نقطه برخوردخط d باخطی‌که از M می‌گذرد و بر d عمود است‌تبدیل کند. درشکل (۳-۱) تبدیل‌یافته‌نقطه‌های A و B و C به‌ترتیب‌با A' و B' و C' نمایش داده شده‌اند. تبدیل T را تصویر برخط d و یا دقیقتر بگوئیم تصویر قائم برخط d می‌نامند. تبدیل یافته هرنقطه را



(شکل ۳-۱)

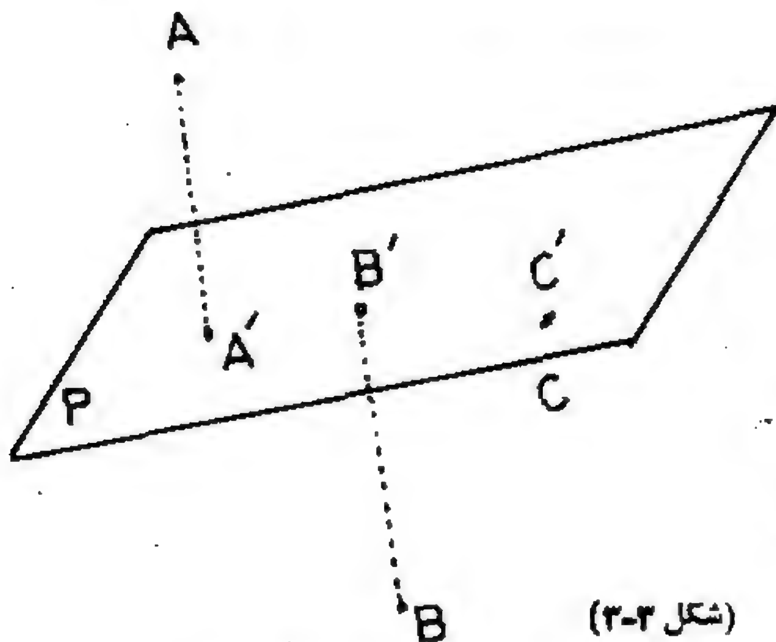
نیز تصویر آن نقطه برخط d می‌نامیم.

بسادگی دیده می‌شود که اگر پاره خط MN برخط d عمود نباشد، تصویر MN بر خط d (یعنی تبدیل یافته پاره خط MN) همان‌پاره خط $M'N'$ است که M' تصویر M و N' تصویر N می‌باشند. چنانچه خط PQ بر d عمود باشد، تصویر PQ بر d یك نقطه خواهد شد (شکل ۳ـ۲).



(شکل ۳-۲)

۳.۲.۲- تصویر برصفحه. صفحه ثابت P را در نظر می‌گیریم. تبدیل T را در فضای سه‌بعدی چنان‌تعریف می‌کنیم که هرنقطه دلخواه M از فضا را به نقطه برخوردصفحه P با خطی‌که از M می‌گذرد و بر P عمود است تبدیل‌کند. این تبدیل را تصویر برصفحه (یا دقیقتر بگوییم تصویر قایم‌برصفحه) می‌نامیم. درشکل(۳ـ۳) تبدیل یافته‌های نقطه‌های A و B و C به‌ترتیب با A' و B' و C' نمایش داده شده‌اند.



(شکل ۳-۳)

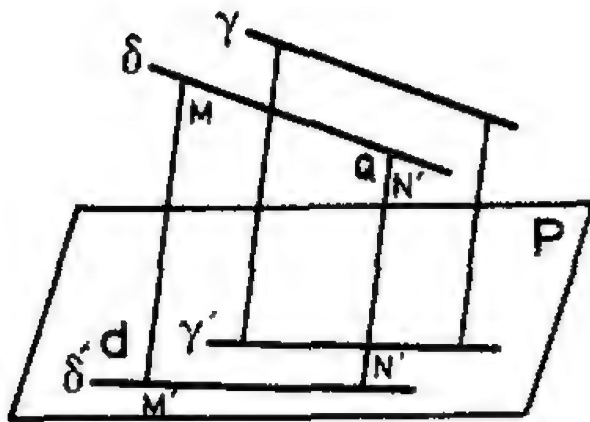
قضیه - اگر خط δ برصفحه P عمودنباشد، تصویر δ بر P یك خط راست است (شکل ۳ـ۴).

برهان ــ اگر M نقطه دلخواهی از δ و M' تصویر M بر P باشد آنگاه نقطه M'، هم‌درصفحه P قرار دارد وهم در صفحه Q که از δ می‌گذرد و بر P عمود است. بنابراین تصویر δ بر فصل مشترك دوصفحه P و Q قرار دارد. برعکس، هرنقطه N' از فصل مشترك دوصفحه P و Q تصویر نقطه‌ای مانند N از خط δ است (از N' خطی برصفحه عمود کنید تا δ را در N قطع کند). بنابراین تصویر δ برصفحه P درست‌همان فصل‌مشترك P و Q است و برهان قضیه به پایان می‌رسد.

اینك اگر δ و P مانند قضیه بالا باشند و خط دیگری مانند γ نیز با δ موازی باشد، آنگاه تصویر γ برصفحه P همان فصل مشترك صفحه P با صفحه‌ای مانند R است که از γ

می گذرد و بر P عمود است. چون δ و γ باهم موازیند. پس Q و R نیز باهم موازیند و درنتیجه تصویرهای δ و γ برصفحه P متوازیند. یعنی:

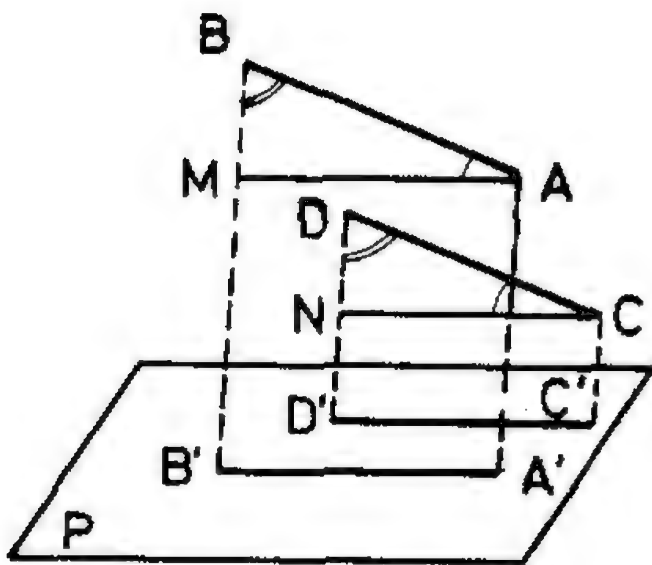
قضیه - اگر دوخط باهم موازی باشند ولی برصفحه P عمود نباشد. تصویرهای آن‌دوخط بر صفحه P با هم موازیند.



(شکل ۳-۴)

قضیه - تصویرهای دو پاره‌خط متوازی که برصفحه تصویر عمود نیستند، باآن پاره‌خطها متناسبند.

برهان - اگر $AB \| CD$ و $A'B'$ و $C'D'$ تصویرهای آن دو پاره‌خط برصفحهٔ P باشند، شکل ۳-۵، و از نقاط A و C دوخط موازی $A'B'$ و $C'D'$ رسم کنیم تا امتدادهای BB' و DD' را به‌ترتیب در نقاط M و N قطع کنند:



(شکل ۳-۵)

$$(AM \| CN \text{ و } AB \| CD) \Longrightarrow \angle A = \angle C$$

$$(BM \| DN \text{ و } BA \| DC) \Longrightarrow \angle B = \angle D$$

در نتیجه $\Delta ABM \sim \Delta CDN$ و از آنجا:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$$

و چون:

$$CN = C'D' \text{ و } AM = A'B'$$

است (چرا؟)، خواهیم داشت:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}$$

یا:

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$$

نتیجهٔ ۱- تصویرهای دو پاره‌خط متوازی و متساوی برهرصفحه باهم برابرند.

نتیجهٔ ۲- تصویر وسط هرپاره‌خط، وسط تصویر آن پاره‌خط است.

تمرین

۱- عبارات زیر را چنان کامل کنید که گزاره‌های درست حاصل شود:

- تصویرهای دو خط موازی برهرصفحه دوخط ...

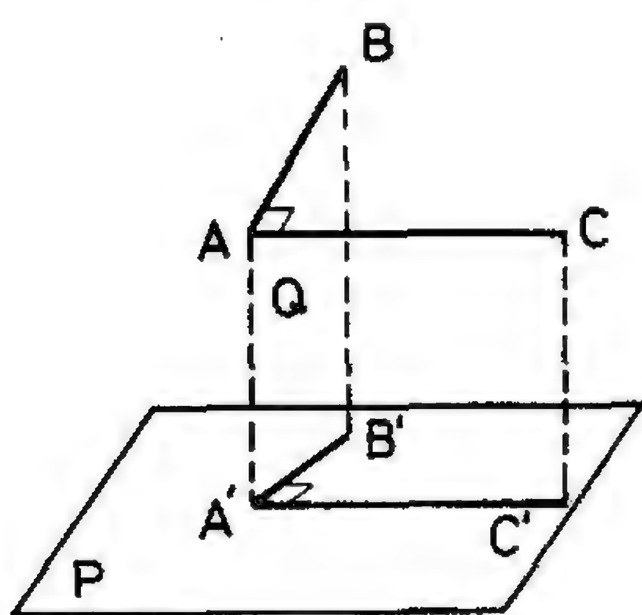
ـ اگـر صفحهٔ یك شکل مسطح برصفحهٔ تصویر عمود باشد ، تصویر قائم آن شکل برآن صفحه ...

ـ اگرتصویر خطی بریك صفحه منحصر به یك نقطه باشد، آن خط ...

۲ـ ثابت کنید تصویر هرپاره خط بریك خط (یك صفحه) ازآن پاره خط بزرگتر نیست.

۳.۲.۳ـ تصویر زاویهٔ قائمه بر صفحه ـ تصویر هرزاویه برهرصفحهٔ موازی باصفحهٔ آن زاویه باخود زاویه مساوی است (چرا؟). ودرسایر حالات ممکن است کوچکتر یا بزرگتر ازآن باشد. تصویر (قائم) زاویهٔ قائمه بریك صفحه درحالت خاصی ممکن است زاویهٔ قائمه باشد. دراین بخش حالتی راکه تصویر زاویهٔ قائمه برصفحهٔ ناموازی باصفحه آن، زاویه قائمه است بررسی می کنیم.

قضیه ـ تصویر زاویهٔ قائمه برصفحه‌ای که با یك ضلع آن موازی و بر ضلع دیگر آن عمود نباشد، یك زاویهٔ قائمه است.



(شکل ۳ـ۶)

برهان ـ زاویهٔ قائمهٔ BAC را کـه در آن ضلع AC باصفحهٔ P موازی وضلع AB برصفحهٔ P عمود نیست درنظر می گیریم (شکل ۳ـ۶) اگر $A'B'$ تصویـر AB و $A'C'$ تصویر AC باشد.

$$AC \parallel P \Longrightarrow AC \parallel A'C' \quad \text{(چرا؟)}$$

واگرصفحهٔ مصور خط AB را Q بنامیم:

$$(AC \parallel A'C' \text{ و } AC \perp AB) \Longrightarrow A'C' \perp AB$$

$$(A'C' \perp AB, A'C' \perp AA') \Longrightarrow A'C' \perp Q$$

$$A'C' \perp Q \Longrightarrow A'C' \perp A'B'$$

یعنی $\angle B'A'C' = 90^\circ$ است.

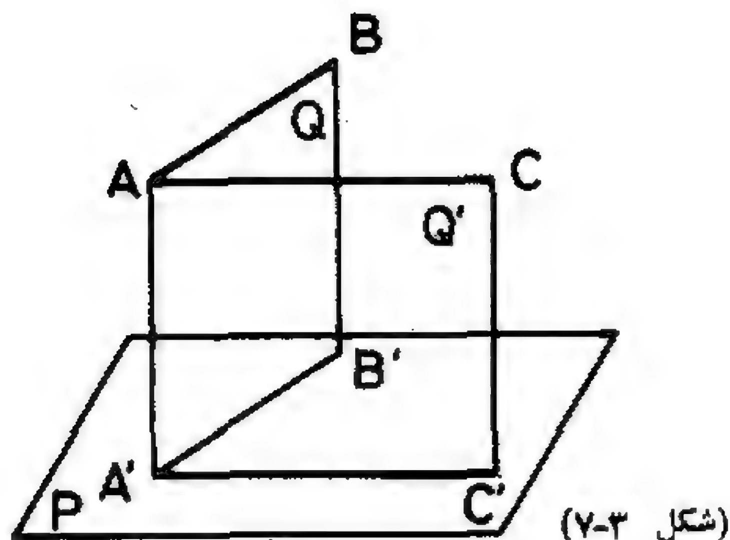
قضیه ـ هرگاه تصویرهای دوخط بریك صفحه برهم عمود باشند ویکی از آن دو خط با صفحهٔ تصویر موازی باشد، آن دوخط بریکدیگر عمودند.

اثبات قضیه با دانش‌آموزان است.

قضیه ـ هرگاه تصویر زاویهٔ قائمه‌ای بر یك صفحه زاویهٔ قائمه باشد، دست‌کم یکی از اضلاع آن زاویه باصفحهٔ تصویر موازی است.

برهان ـ اگر $\angle BAC$ یك زاویهٔ قائمه و $\angle B'A'C'$ تصویـر آن برصفحهٔ P نیز

زاویهٔ قائمه باشد و یکی از دو ضلع زاویهٔ مفروض، مثلا ضلع AB با صفحهٔ P ، و در نتیجه با $A'B'$ تصویرش بر آن صفحه موازی نباشد (شکل۳ـ۷)، ملاحظه می کنیم که اگر Q صفحهٔ مصور خط AB باشد:



(شکل ۳-۷)

$$(A'C' \perp A'B' \ , \ A'C' \perp AA') \Longrightarrow A'C' \perp Q \Longrightarrow A'C' \perp AB$$

واگر Q' صفحهٔ مصور ضلع AC باشد :

$$(A'B' \perp A'C' \ , \ A'B' \perp AA') \Longrightarrow A'B' \perp Q' \Longrightarrow A'B' \perp AC$$

بنابراین چون $A'B' \nparallel AB$ پس $AC \perp Q$.

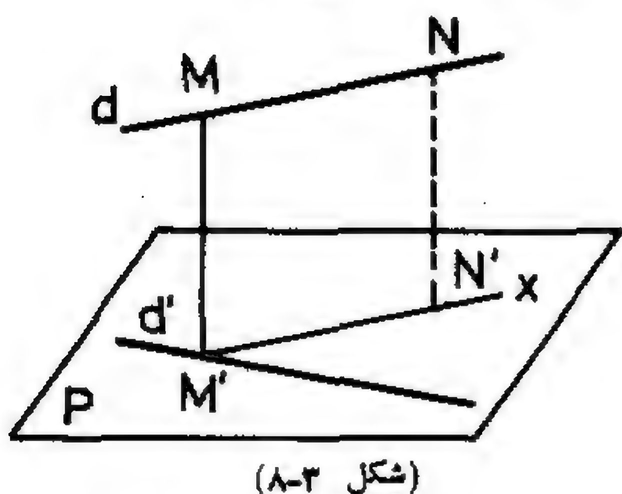
اما: $$(AC \perp Q \ , \ A'C' \perp Q) \Longrightarrow AC \parallel A'C' \Longrightarrow AC \parallel P$$

یعنی اگریکی ازدوضلع زاویهٔ مفروض باصفحهٔ تصویر موازی نباشد، ضلع دیگرش باآن صفحه موازی است وبنابراین برهان قضیه به‌پایان می‌رسد.

۴.۲.۳ـ عمود مشترك دوخط متنافر- تعریف ــ عمود مشترك دوخط متنافر پاره خطی‌است که برهردوخط عمود باشد ودوسر آن بردوخط مزبورواقع باشند.

برای مشخص کردن عمود مشترك دوخط متنافربه طریق زیرعمل می‌شود:

اگر d و d' را دو خط متنافر وپاره خط MM' را عمود مشترك آن دو فرض کنیم (شکل ۳ـ۸) و ازنقطهٔ M' خط $M'x$ را موازی d درنظربگیریم، دوخط d' و$M'x$ صفحه‌ای‌مانند P مشخص‌می کنند. $M'x$ تصویرخط d براین صفحه است (چرا؟)، بنابراین تصویرهرنقطهٔ N ازخط d برصفحهٔ P روی خط $M'x$ واقع است. ازاینجا نتیجه می گیریم که اگر برخط d' صفحهٔ P راموازی d مروردهیم ونقطهٔ N' تصویرنقطهٔ غیرمشخص N ازخطd را برصفحهٔ P تعیین‌کنیم وازنقطهٔ N' خطی موازی d رسم‌کنیم، این خط با d' در نقطهٔ M' تلاقی می کند و عمودی‌که از نقطهٔ M' برصفحهٔ P اخراج شود خط d را در نقطهٔ M قطع می کند و MM' عمود مشترك دوخط مفروض است (چرا؟).



(شکل ۳-۸)

درازای پاره خط MM' (عمود مشترك دوخط متنافر d و d') راکه کوتاهترین پاره خط

متکی بر d و d′ است، فاصلهٔ دوخط متنافر d و d′ می‌نامند.

تمرین

۱ـ ثابت کنید عمود مشترك دوخط متنافر منحصر به‌یك پاره خط است.

۲ـ ثابت کنید عمود مشترك دو خط متنافر کوتاهترین پاره خطی است که دوسر آن بردو خط مزبور واقع باشند.

۳ـ خط d وپاره‌خط AA′ راکه در نقطهٔ A برخط d عمود است درنظر می گیریم. مکان هندسی خطهای d′ را چنان تعیین کنید که عمود مشترك خط d باخطهای d′ پاره خط AA′ باشد.

۳.۳ـ تبدیل همانی ـ تبدیل همانی تبدیلی است که درآن تبدیل یافتهٔ هرنقطه، خود آن نقطه است. اگراین تبدیل را با T نمایش دهیم، برای هرنقطه A داریم:

$$T(A) = A$$

۴.۳ـ تبدیل پایا ـ تبدیل پایا تبدیلی است که در آن تبدیل یافتهٔ همهٔ نقاط یك نقطهٔ معین است.

اگراین تبدیل را با T و نقطه معین را با O نمایش دهیم، درشکل (۳ـ۹) داریم:

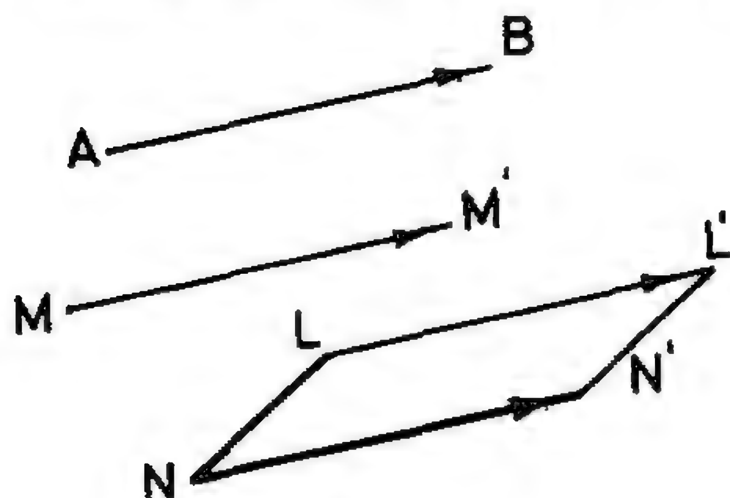
$$T(M) = O \text{ و } T(AB) = \{O\}$$



(شکل ۳-۹)

۵.۳ـ انتقال درصفحه ـ یك بردار ثابت $\overrightarrow{AB}$ درصفحهٔ π درنظر می گیریم. از هرنقطهٔ M در π می‌توان بردار $\overrightarrow{MM'}$ را برابربا $\overrightarrow{AB}$ رسم کرد (شکل ۳ـ۱۰). دراین صورت نقطهٔ M′ راانتقال یافتهٔ نقطهٔ M در انتقال به بردار $\overrightarrow{AB}$ می گوییم.

انتقال به $\overrightarrow{AB}$ را با نماد $T_{\overrightarrow{AB}}$ و گاهی به‌اختصار با نماد $\overrightarrow{T}$ نمایش می‌دهیم وآن را «انتقال به بردار AB» یا



(شکل ۳-۱۰)

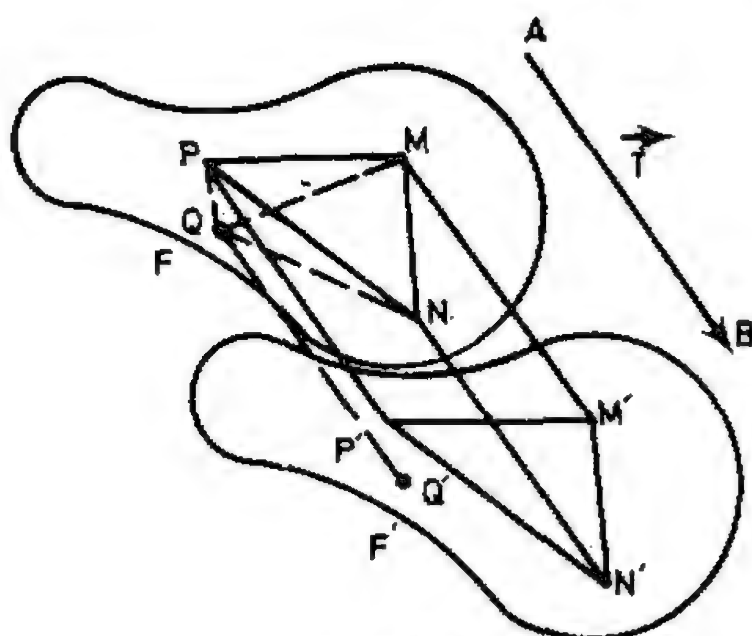
«انتقال T» می‌خوانیم. دراین تبدیل $\overrightarrow{AB}$ را بردار انتقال می‌گوییم. بنابراین:

انتقال تبدیلی است که در آن تبدیل یافتهٔ هرنقطهٔ M نقطه‌ای مانند M′ است چنان که:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

انتقال درفضا نیز بهمین ترتیب تعریف می‌شود.

(۲) **قضیه-** انتقال یافته هر شکل با آن شکل برابراست.



(شکل ۳-۱۱)

برهان ــ این قضیه گرچه در فضای سه بعدی هم درست است ولـی ما فقط در صفحه اثبات مـی‌کنیم. هـرگاه F′ انتقال یافته یك‌شکل F وسه نقطه M′ و N′ و P′ به ترتیب انتقال یافته‌های M و N و P (غیر واقع بریك خط راست) ازشکل F در انتقال بـه بـردار $\overrightarrow{AB}$ باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{AB}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$$

و درنتیجه $M'N' = MN$. یعنی‌در انتقال، تبدیل یافته هرپاره‌خط با آن پاره‌خط برابر است بنابراین $\Delta M'N'P' = \Delta MNP$. پس‌می‌توان F′ را چنان‌روی F نهادکه M′وN′وP′ به‌ترتیب بـر M و N و P منطبق شوند. اینك نشان می‌دهیم که F و F′ کاملا یکدیگر را می‌پوشانند. نقطه دلخواه Q′ در F′ که تبدیل یافته Q در F می باشددرنظرمی گیریم. داریم:

$$NQ = N'Q' \text{ و } MQ = M'Q' \text{ و } PQ = P'Q'$$

اگر پس‌از رویهم نهادن F′ و F ، نقطه Q′ برنقطه‌ای‌از F (مانند Q″) منطبق گردد داریم:

$$PQ = PQ'' \text{ و } MQ = MQ'' \text{ و } NQ = NQ''$$

در نتیجه اگـر Q و Q″ متمایز باشند سه نقطه M و N و P برعمود منصف Q Q″ قـرار دارند که خلاف فرض است . پس Q′ بر Q منطبق می‌شود و در نتیجه F′ کاملا بر F منطبق می گردد .

تمرین

۱ـ سه نقطهٔ A و B و C مفروضند. به‌مبداء C برداری برابر با $\overrightarrow{AB}$ رسم کنید.

۲ـ ثابت کنید که انتقال یافتهٔ هرخط راست یك خط راست است.

۳ـ تبدیل یافتهٔ یك شکل F در تبدیل همانـی چه شکلی است؟ در تبدیل پایا چه شکلی است ؟

۴ـ انتقال را در مجموعهٔ نقاط فضا تعریف کنید.

۵ـ نقاط A و B و C و D را برصفحه کاغذ اختیار کنید و باکمك گونیا و خط کش: تبدیل‌یافتهٔ پاره‌خط CD را در انتقال $\overrightarrow{AB}$ رسم کنید.

۶ـ دایره $C(O,R)$ و $\overrightarrow{AB}$ درصفحه مفروضند، تبدیل‌یافتهٔ دایره را درانتقال $\overrightarrow{AB}$ رسم کنید.

۷ـ در مسئلهٔ قبل در دایرهٔ C وتری موازی و مساوی پاره خط AB رسم کنید. (مسئله چند جواب دارد؟)

۸ـ زاویهٔ xOy و پاره‌خط MN درصفحهٔ مفروضند ، پاره‌خطی موازی و مساوی MN رسم کنید که دو سرآن بر اضلاع زاویه واقع باشند (بحث) .

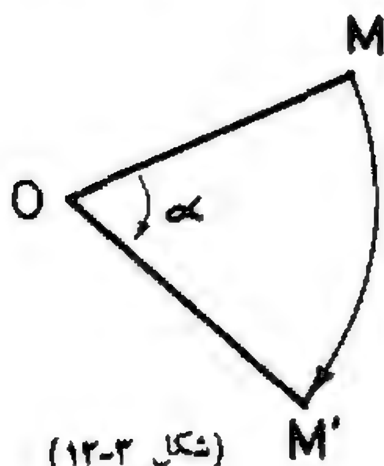
۹ـ دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ و خط d در صفحهٔ P مفروضند. خطی موازی d رسم کنید که هریك از دو دایره را در دو نقطه قطع کند و وترهای بدست آمده در دو دایره متساوی باشند ، (مسئله چند جواب و درچه صورت جواب دارد؟) .

۶.۳ـ دوران

۱.۶.۳ـ تعریفـ نقطهٔ ثابت O درصفحه و زاویه جهت‌دار α را درنظر می‌گیریم، متناظر باهر نقطهٔ M نقطه‌ای مانند M' می‌توان تعیین کردچنان که :

$$\widehat{M'OM}=\alpha \text{ و } OM'=OM$$

باشند (چنانچه M همان O باشد از شرط دوم چشم می‌پوشیم) دراین صورت نقطهٔ M' را تبدیل‌یافتهٔ نقطهٔ M در«دوران به زاویهٔ α گرد نقطهٔ O» می‌گوییم. (شکل ۳-۱۲).



(شکل ۳-۱۲)

برای مشخص کردن نقطهٔ M' نقطهٔ M را به‌نقطهٔ O وصل کـرده و در نقطهٔ O برنیم خط OM زاویه‌ای مساوی α و در جهت مناسب (برحسب آن که زاویـهٔ α مثبت یا منفی یا صفر

باشد) می‌سازیم و برضلع دیگر این زاویه پاره خط OM' را مساوی OM جدا می‌کنیم.

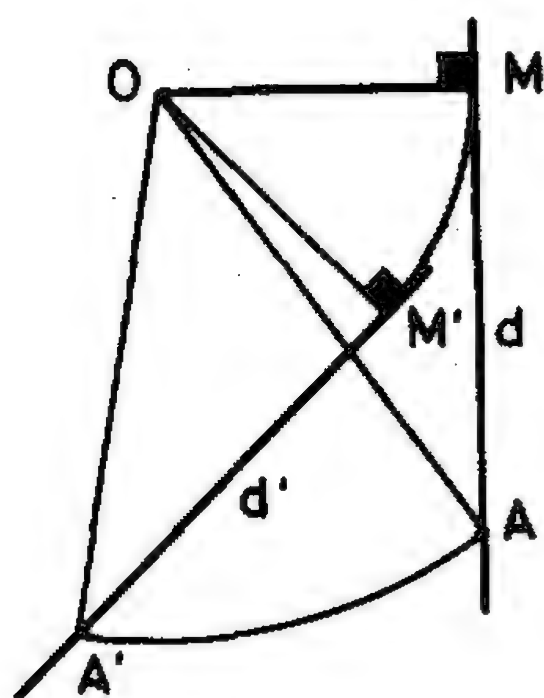
دردوران، تبدیل یافتهٔ هرنقطهٔ M از حرکت آن نقطه بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OM و به‌اندازهٔ α مشخص می‌شود. یعنی ضمن این حرکت فاصلهٔ نقطهٔ M ازمرکز دوران ثابت می‌ماند و نقطهٔ M بردایره‌ای به این مرکز کمانی می‌پیماید که زاویهٔ مرکزی مقابل‌آن به اندازهٔ α است.

هردوران با مرکزآن و اندازهٔ جبری زاویهٔ α (زاویهٔ دوران) مشخص می‌شود. زاویهٔ دوران ممکن است مثبت یا منفی یاصفرباشد. اگراندازهٔ دورانی صفرباشد، آن را دوران صفر می‌نامند. دوران صفر تبدیل همانی است.

دوران به مرکز O و به زاویهٔ α را با نماد $\mathcal{R}_O^\alpha$ نمایش می‌دهیم وآن را «دوران به اندازهٔ α گرد نقطهٔ O» می‌خوانیم.

۲.۶.۳- دوران یک شکل

قضیهٔ ۱- دردوران تبدیل یافتهٔ هر خط راست، یک خط راست است.



(شکل ۳-۱۳)

برهان ـ دوران $\mathcal{R}_O^\alpha$ و خط d را درنظر می‌گیریم. از نقطه O (مرکز دوران) عمودی بر d رسم می‌کنیم تا آن را در M قطع کند (شکل ۳ـ۱۳). فرض می‌کنیم M' دوران‌یافته M است. نقطه‌دلخواه A را روی d اختیار و A' (دوران‌یافته A) را تعیین می‌کنیم. بسادگی دیده می‌شود که:

$$\angle MOA = \angle M'OA' \quad \text{و} \quad OM = OM' \quad \text{و} \quad OA = OA'$$

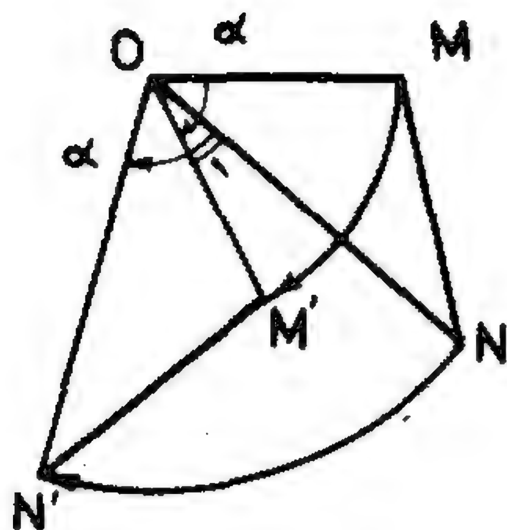
پس :

$$\triangle OMA = \triangle OM'A' \implies \angle OM'A' = \angle OMA$$

پس $A'M'$ بر OM' عموداست ودرنتیجه دوران یافته d برخطی مانند d' که در M'

بر OM' عمود است قراردارد. برعکس می‌توان ثابت کرد که هر نقطه دلخواه N' از d' با دورانی گرد O به زاویه $\alpha-$ بر نقطه‌ای مانند N ازخط d منطبق می‌گردد. پس d' دوران یافته خط d گرد O بزاویه α می‌باشد.

قضیهٔ ۲- فاصلهٔ تبدیل یافته‌های دونقطه درهردوران با فاصلهٔ‌آن دونقطه مساوی است. یاتبدیل یك پاره خط، پاره خطی است برابرآن.



(شکل ۳-۱۴)

برهان ــ اگر نقاط M' و N' به ترتیب تبدیل یافته های نقاط M و N در دوران به مرکز O و به زاویهٔ α باشد (شکل ۳-۱۴).

به موجب تعریف:

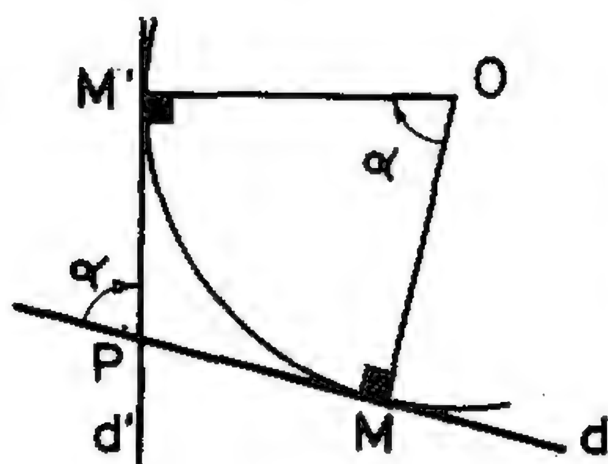
$$ON'=ON \text{ و } OM'=OM$$

$$\angle M'ON'=\angle MON \qquad \text{(چرا؟)}$$

بنابراین :

$$\triangle M'ON'=\triangle MON \Longrightarrow M'N'=MN$$

قضیهٔ ۳- اگر $-180^\circ<\alpha<180^\circ$ باشد، آنگاه‌در دوران R_O^α ، زاویه میان هر خط و دوران یافته‌آن با قدرمطلق α برابراست.



(شکل ۳-۱۵)

برهان ــ هرگاه خط d' تبدیل یافتهٔ خط مفروض d در دوران به مرکز O و به زاویهٔ α باشد (شکل ۳-۱۵)وخط d را درنقطهٔ P قطع کند، چهار ضلعی $OMPM'$ محاطی است (چرا؟). بنابراین:

$$\widehat{\alpha}+\widehat{M'PM}=180^\circ \Longrightarrow (\widehat{d,d'})=\alpha$$

نتیجه ـ دوران یافتهٔ هرزاویه باآن زاویه مساوی است (چرا؟).

تمرین

۱ــ مثلث متساوی الاضلاعی را گردنقطهٔ همرسی میانه‌های‌آن به زاویهٔ 60° دوران دهید. ساده‌ترین راه برای رسم‌تبدیل یافتهٔ مثلث کدام است؟

۲ــ تبدیل یافتهٔ مربع گرد مرکزش در چه دورانی خود مربع است؟ آیا در این دوران تبدیل یافتهٔ هــر نقطه بر خود آن نقطه منطبق مــی‌شود؟ در کــدام دوران چنین وضعی پیش می‌آید ؟

۳ــ درجه دورانی، جهت دوران در تعیین دوران یافته شکل بی‌تأثیر است.

۴ــ دوپاره خط متساوی AB و CD درصفحهٔ P رسم شده‌اند ، اگر CD دوران یافته AB دریك دوران باشد، مرکز وزاویهٔ دوران را روی شکل تعیین کنید.

۵ــ آیا دوران گرد یك مرکز را درفضا هم می‌توان تعریف کرد یا فقط درصفحه است؟

قضیه ــ تبدیل یافتهٔ هرشکل در هر دوران باآن شکل مساوی است.

برهان ــ چون دوران تبدیلی است که درآن پاره خطها با مقدمهای خود هم اندازه باقی می‌مانند. بنابراین برهان این قضیه همانند برهان برابری هر شکل با انتقال یافته‌آن می‌باشد.

۳.۶.۳ــ رسم تبدیل یافتهٔ یك خط در دوران ــ ازآنچه ذکر شد می‌توان نتیجه گرفت که برای تعیین تبدیل یافتهٔ یك خط راست در هردوران به‌یکی ازراههای زیر می‌توان عمل کرد:

۱ــ تبدیل یافتهٔ دونقطه ازآن خط را تعیین کرده وآنها را به یکدیگر می‌پیوندیم.

۲ــ ازمرکز دوران خطی عمود برخط مفروض رسم کرده وتبدیل یافتهٔ پای عمود را تعیین می‌کنیم وآن را به مرکز دوران وصل می‌کنیم ودرآن نقطه بر پاره خط حاصل خطی‌عمود رسم می‌کنیم .

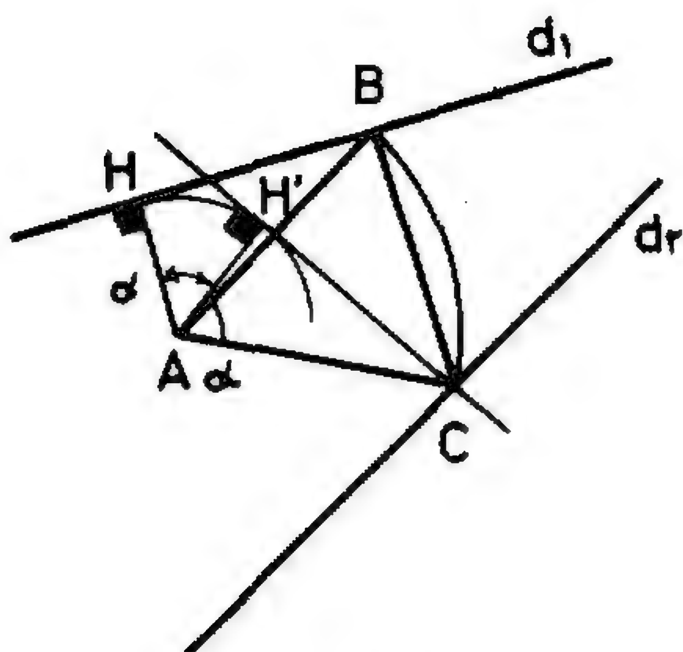
۳ــ تبدیل یافتهٔ یك نقطه ازخط را تعیین کرده و برآن نقطه خطی می‌گذرانیم که با خط مفروض درجهت مناسب زاویه‌ای مساوی زاویهٔ دوران تشکیل دهد.

چنان که ملاحظه می‌کنید در راههای ۲ و ۳ از ویژگیهای دوران برای تعیین تبدیل یافتهٔ خط استفاده می‌شود وتبدیل یافتهٔ یك نقطهٔ ازخط را تعیین‌کرده و با توجه به قضایای قبل‌تبدیل یافتهٔ خط را رسم می‌کنیم.

مسئلهٔمهم ــ دو خط d_1 و d_2 ونقطهٔ A در صفحهٔ P مفروضند، مثلث متساوی‌الساقینــی رسم کنید که نقطهٔ A تارك آن باشد و دو رأس دیگرش بر دو خط d_1 و d_2 واقع باشند و زاویهٔ رأس آن به‌اندازهٔ معلوم α باشد.

حل ــ اگر ABC مثلث‌مطلوب‌باشد (شکل ۳ــ۱۶)، $\angle A=\alpha$ و $AB=AC$ است. این‌دو تساوی نشان می‌دهند که در این‌صورت نقطهٔC تبدیل یافتهٔ نقطهٔB در دوران به‌مرکزA

و به زاویهٔ α در جهت مناسب است.



(شکل ۳-۱۶)

بنابراین تبدیل یافتهٔ خط d_1 در دوران گرد نقطهٔ A و به زاویهٔ α از نقطهٔ C می‌گذرد. پس برای رسم مثلث کافی است خط d_1 را گرد نقطهٔ A به زاویهٔ α دوران دهیم، محل تلاقی تبدیل یافته d_1 با خط d_2 رأس C از مثلث مطلوب است.

مسئله در چه صورت جواب دارد؟

تمرین

۱ــ اولا ثابت کنید که اگر مربعی در متوازی‌الاضلاعی محاط شده باشد محل برخورد اقطار مربع بر محل برخورد اقطار متوازی‌الاضلاع منطبق است ثانیاً مربعی رسم کنید که چهار رأس آن برچهار ضلع (یا بر امتداد چهار ضلع) یك متوازی‌الاضلاع واقع باشند.

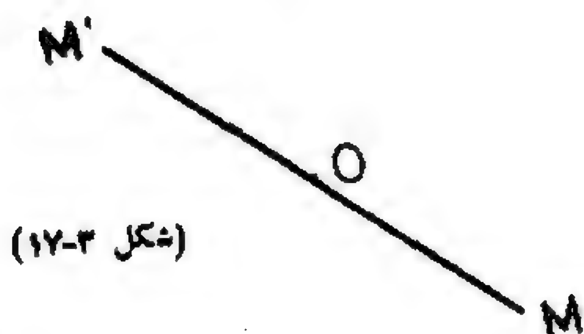
۲ــ نقطهٔ A و دوخط d و d' درصفحهٔ P مفروضند، مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کنید که یك رأس آن نقطهٔ A و دو رأس دیگرش بردوخط d و d' باشند. مسئله درچه‌صورت جواب دارد و چند جواب؟

۳ــ سه خط d و d' و d'' در یك صفحه مفروضند ، مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کنید که سه رأس آن برسه خط مزبور واقع باشند. مسئله درچه‌صورت جواب دارد و چند جواب؟

۴ــ نقطهٔ A و دو دایرهٔ C و C' درصفحهٔ P مفروضند. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی رسم کنید که به تارك A باشد و دوسر قاعدهٔ آن بر دو دایرهٔ C و C' باشند.

۷.۳ــ تقارن مرکزی

۱.۷.۳ــ تعریف ــ نقطهٔ O را در صفحهٔ π در نظر می‌گیریم، متناظر با هرنقطهٔ M در صفحه نقطه‌ای مانند M' درآن صفحه می‌توان تعیین کرد چنان‌که $OM = OM'$ یعنی نقطهٔ O وسط MM' باشد(شکل ۳ــ۱۷). در این‌صورت نقطهٔ M' را قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به نقطهٔ O و تبدیلی‌را که‌در آن M' تبدیل یافتهٔ نقطه M باشد، تقارن به‌مرکز O (تقارن‌مرکزی) می‌گوییم .



(شکل ۳-۱۷)

تقارن به مرکز O را با نماد S_O

نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$M' = S_O M$$

برای تعیین تبدیل یافتهٔ هر نقطه در تقارن به‌مرکز O، آن نقطه را بمرکز تقارن وصل کرده و پاره‌خط حاصل‌را درهمان جهت به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم.

۲.۷.۳- ویژگیهای تقارن مرکزی - از تعریف تقارن مرکزی می‌توان نتیجه‌گرفت‌که:

۱- هر تقارن مرکزی وارون خود می‌باشد . یعنی:

$$M' = S_O M \Leftrightarrow M = S_O M'$$

۲- تقارن مرکزی، دوران به زاویهٔ °۱۸۰ گرد مرکز تقارن است. بنابراین تقارن مرکزی همهٔ ویژگیهای دوران را حفظ می‌کند ، یعنی:

- قرینهٔ مرکزی هرخط راست یك خط راست است.
- قرینهٔ مرکزی هرشکل با آن شکل هم‌اندازه است.
- در تقارن مرکزی قرینهٔ مرکز تقارن برخودش منطبق است.
- درتقارن مرکزی هرخط و تبدیل یافتهٔ آن متوازیند.

۳.۷.۳- مرکزتقارن یك شکل - هرگاه یك شکل F (از صفحه) به صورتی باشدکه قرینه هر نقطه M آن نسبت به یك‌نقطه O نقطه‌ای مانند M' از خودآن شکل‌باشد، نقطه O را مرکز تقارن‌آن شکل می گوییم. به‌بیان دیگـر شکل F نسبت بـه نقطه O متقارن است. مانند یك پاره خط‌که نسبت به وسط‌آن، متقارن است. مرکز هردایره، همچنین مرکزهرمتوازی‌الاضلاع، مرکزهای تقارن دایره و متوازی‌الاضلاعند.

تمرین

۱- آیا تقارن مرکزی را درمجموعهٔ نقاط فضا نیز می‌توان تعریف‌کرد؟ چگونه؟

۲- تقارن مرکزی با چند عامل مشخص می‌شود؟ آیا تقارنهای هـم مرکز از یکدیگر متمایزند ؟

۳- سه‌شکل هندسی نام ببریدکه مرکزتقارن داشته باشند.

۴- نقاط A' و B' و C' قرینه‌های سه رأس یك‌مثلث را نسبت به‌نقطهٔ همرسی‌میانه‌های آن تعیین‌کرده وثابت‌کنید $BC' = CB'$.

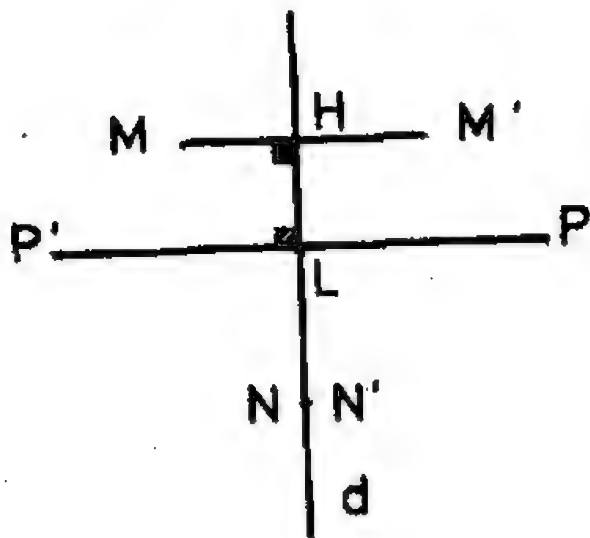
۵- دوخط d و d' ونقطه M درصفحهٔ P داده شا ه‌اند، پاره‌خطی رسم‌کنیدکه برنقطهٔ M

بگذرد ودوسرآن بردوخط d و 'd واقع باشند ونقطهٔ M وسط آن پاره خط باشد. مسئله در چه صورت جواب دارد؟

۶- خط d ودایرهٔ C(O,R) ونقطهٔ M درصفحه داده شده‌اند. برخط d نقطه‌ای مانند A و بردایرهٔ C نقطه‌ای مانند B چنان تعیین کنید که $AM=MB$ وسه نقطهٔ A و B و M دریك امتداد باشند.

۸.۳- تقارن محوری

۱.۸.۳- تعریف- خط d در صفحه داده شده است. نقطه دلخواه M را (در صفحه) در نظر می‌گیریم. اگر M روی d نباشد، قرینه M نسبت به‌خط d را نقطه‌ای مانند 'M تعریف می‌کنیم بطوری که d عمودمنصف 'MM باشد. اگر M روی d باشد: قرینه M نسبت به d راهمان M تعریف می‌کنیم. بسادگی دیده می‌شود که هر نقطه نسبت به‌یك خط یك وتنها یك‌قرینه دارد. تبدیلی که هرنقطه را به قرینه آن نقطه نسبت به‌خط d تبدیل می‌کند، تقارن محوری با محور d نامیده می‌شود. درشکل(۳-۱۸) قرینه‌های نقطه‌های M و P و N به‌ترتیب با 'M و 'N و 'P نمایش داده شده‌اند.



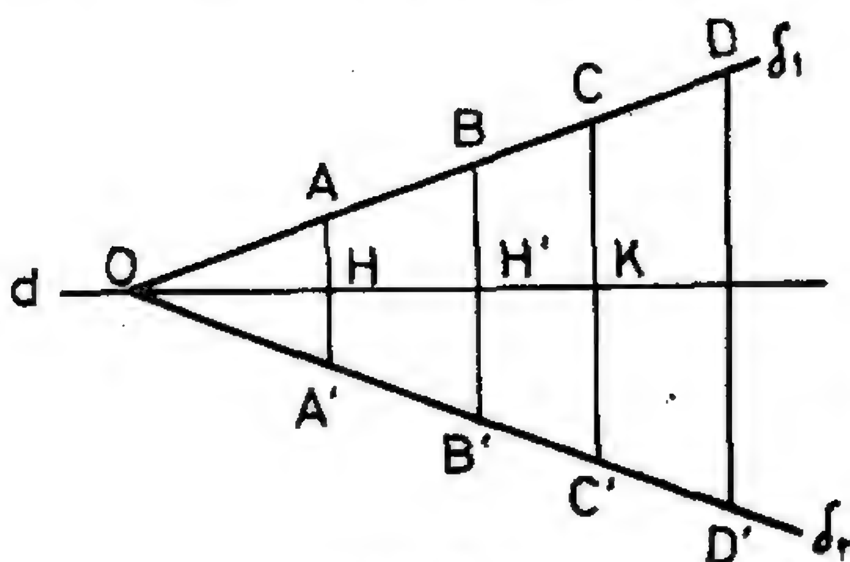
(شکل ۳-۱۸)

۲.۸.۳- ویژگیهای تقارن محوری

قضیه- درتقارن محوری تبدیل یافتهٔ هرخط راست، یك خط راست است.

برهان - اگر دو خط ناموازی d و δ_1 در صفحه ونقاط 'A و 'B قرینه‌های دو نقطهٔ A و B از δ_1 نسبت به خط d باشند، (شکل ۳-۱۹) خطهای AB و 'A'B خط d را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند. زیرا که:

$$\frac{AH}{HA'}=\frac{BH'}{H'B'}=1 \text{ و } AA' \parallel BB'$$



(شکل ۳-۱۹)

اکنون از نقطهٔ دلخواه C روی δ_1 عمود CK را برخط d فرود آورده و

امتداد می‌دهیم تاخط δ_2 یعنی امتداد $A'B'$ را درنقطهٔ C' قطع کند:

$$(\frac{CK}{KC'}=\frac{AH}{HA'}=1) \Longrightarrow KC'=CK$$

یعنی قرینهٔ هرنقطه از خط δ_1 نسبت به محور d بر خط δ_2 واقع است. برعکس می‌توان دید که هرنقطه D' از δ_2 قرینه نقطه‌ای مانند D از δ_1 است. پس :

$$\delta_2=S_d\delta_1$$

درحالتی که خط δ_1 موازی محور تقارن باشد، δ_2 نیز موازی آن محوراست (چرا؟).

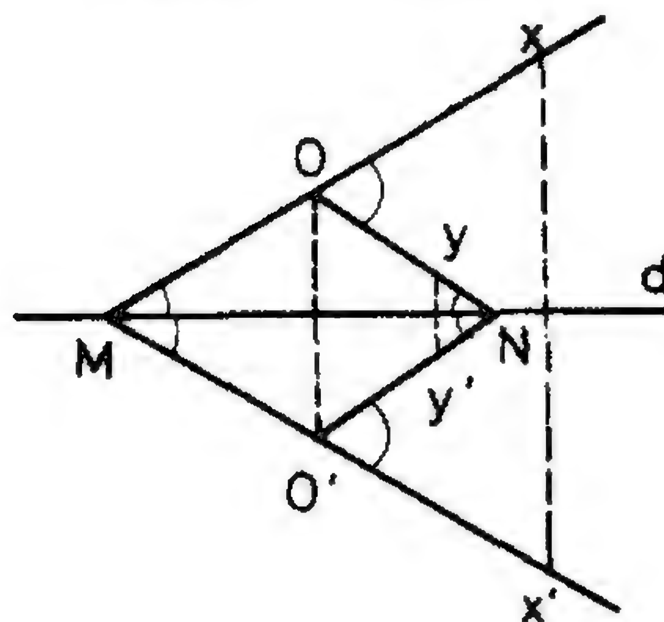
نتیجهٔ۱ ـ قرینهٔ محوری هرپاره خط باآن پاره خط مساوی است.

نتیجهٔ۲ ـ هرخط وقرینهٔ آن نسبت به یك محور، یا باآن محور همرسند و بامحور تقارن زاویه‌های مساوی تشکیل می‌دهند ویا موازی محورهستند وبه فاصله برابر ازآن قراردارند.

قضیهـ قرینهٔ محوری هرزاویه باآن زاویه مساوی است.

برهان ـ اگر در شکل (۳ـ۲۰) $\angle x'O'y'$ قرینهٔ $\angle xOy$ نسبت بهمحور d باشد.

$$[(\angle OMN=\angle O'MN)\wedge(\angle ONM=\angle O'NM)] \Longrightarrow (\angle x'O'y'=\angle xOy)$$



(شکل ۳ـ۲۰)

قضیه را درحالتی که یکی ازاضلاع زاویه با محور تقارن موازی‌است ثابت کنید.

قضیهـ تبدیل یافتهٔ هرشکل درتقارن محوری باآن شکل هم اندازه است.

برهان ـ در تقارن محوری اندازه های پاره خطها حفظ می‌شود.

پس برهان همانند برهان برابری هرشکل باانتقال یافته آن است.

هرشکل F و قرینهٔ محوری‌آن بصورت معکوس متساویند، زیرا برای انطباق آنها باید تبدیل یافتهٔ شکل ازصفحه خارج شود وگرد محور تقارن برخود شکل برگردانده شود.

تمرین

۱ـ آیا قرینهٔ یك لوزی نسبت به خط مفروض در امتداد معین یك لوزی است؟ (همین موضوع را درمورد یك مستطیل بررسی کنید.)

۲ـ ثابت‌کنید مماسهای مشترك خارجی (داخلی) دودایره باخط المرکزین همرسند.

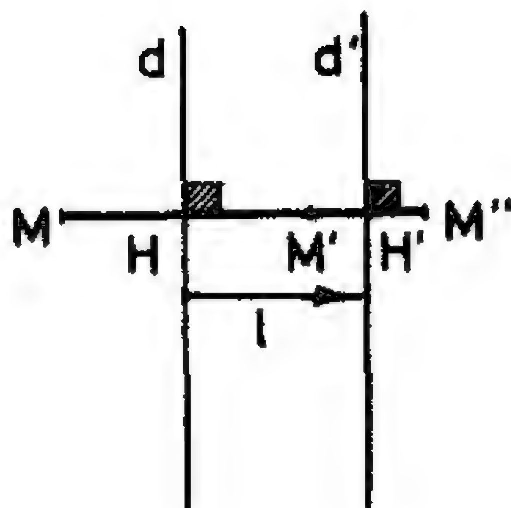
۳ـ دودهکدهٔ A و B دریك زمین هموار دریك طرف یك‌شاهراه d قراردارند، می‌خواهیم

دودهکده را باراههای شوسه به‌بزرگراه‌ارتباط دهیم. اگر بخواهیم راههای ارتباطی کوتاهترین راه بین دودهکده باشد، مسیر را چگونه باید تعیین کرد؟ همین مسئله را وقتی که دو دهکده در دو طرف بزرگراه باشند، حل کنید.

۳.۸.۲- ترکیب دو تقارن محوری

قضیه- نتیجهٔ ترکیب دو تقارن با محورهای موازی، یك انتقال است.

برهان ـ هرگاه دو خط $d \parallel d'$ محورهای تقارن ونقطهٔ M نقطه‌ای ازصفحهٔ دو خط مزبور و $M' = S_d M$ و $M'' = S_{d'} M'$ باشد (شکل ۳-۲۱):



(شکل ۳-۲۱)

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HM'} \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = ۲\overrightarrow{HM'}$$

$$\overrightarrow{M'H'} = \overrightarrow{H'M''} \Longrightarrow \overrightarrow{M'M''} = ۲\overrightarrow{M'H'}$$

اگر دوتساوی اخیررا عضو به عضو باهم جمع کنیم، حاصل می‌شود.

$$\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = ۲(\overrightarrow{HM'} + \overrightarrow{M'H'})$$

پس :

$$\overrightarrow{MM''} = ۲\overrightarrow{HH'}$$

اما $\overrightarrow{HH'}$ بردارثابتی است که امتدادآن عمود برامتداد دوخط d و d' واندازهٔ‌آن‌برابر فاصلهٔ این دوخط وجهت‌آن از d به‌سوی d' است. بنابراین :

$$S_{d'} \circ S_d = ۲\overrightarrow{HH'}$$

تبصره- با همین برهان می‌توان ثابت کرد که:

$$S_d \circ S_{d'} = ۲\overrightarrow{H'H}$$

یعنی $S_{d'} \circ S_d$ و $S_d \circ S_{d'}$ وارون یکدیگرند بنابراین ترکیب دو تقارن دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

قضیه- نتیجهٔ ترکیب دوتقارن با محورهای متقاطع یك دوران است.

برهان ـ اگردو خط d' و d با شرطهای $d \cap d' = \{O\}$ و $\angle(d,d') = \alpha$ و نقطه M

مفروض باشند و $M'=S_dM$ و $M''=S_{d'}M'$ را تعیین کنیم(شکل ۳-۲۲)، خواهیم داشت:

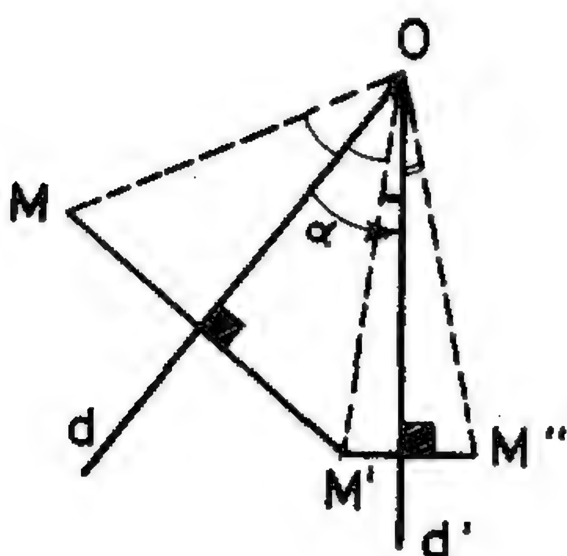
$$[(OM'=OM)\wedge(OM''=OM')]\Longrightarrow OM''=OM$$

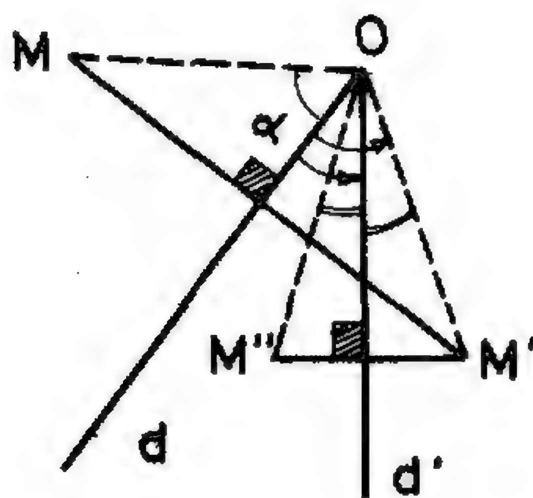
$$[(\widehat{MOM'}=2\widehat{dOM'})\wedge(\widehat{M'OM''}=2\widehat{M'Od'})]\Longrightarrow \widehat{MOM''}=2\alpha$$

$$[(OM''=OM)\wedge(\widehat{MOM''}=2\alpha)]\Longrightarrow M''=\mathcal{R}_O^{2\alpha}M$$

یعنی :

$$[(d\cap d'=O)\wedge(\angle(d',d)=\alpha)]\Longrightarrow S_d\circ S_{d'}=\mathcal{R}_O^{2\alpha}$$





(شکل ۳-۲۲)

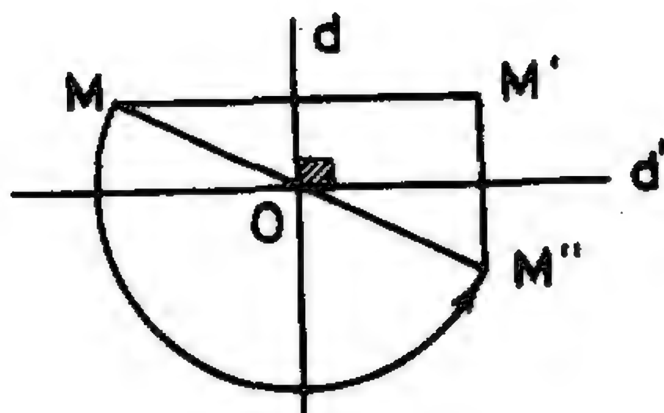
به‌همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$S_{d'}\circ S_d=\mathcal{R}_O^{-2\alpha}$$

یعنی در این حالت نیز ترکیب دو تقارن محوری دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

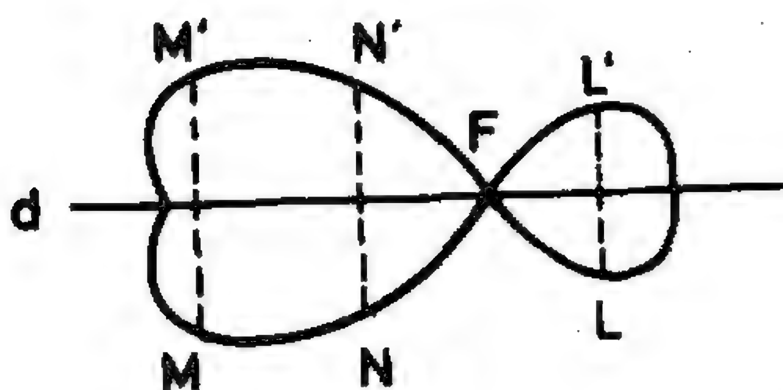
قضیه - نتیجهٔ ترکیب دو تقارن محوری‌که محورهای آنها برهم عمود باشند، تقارن مرکزی است .

برهان ـ به موجب قضیهٔ قبل نتیجه ترکیب دو تقارن محوری که محورهای آنها برهم عمود باشند، دورانی است به زاویهٔ °۱۸۰ و به‌مرکز نقطهٔ تقاطع دو محور تقارن ، و می‌دانیم که دوران به زاویه °۱۸۰ یك تقارن مرکزی است (شکل ۳-۲۳).



(شکل ۳-۲۳)

۴.۸.۳ـ محور تقارن یك شکل- اگر شکل $\mathbf{F}$ در صفحه به‌صورتی باشد که قرینهٔ هرنقطهٔ آن شکل نسبت به خط داده شده d نقطه‌ای ازآن شکل باشد، خط d را محور تقارن شکل $\mathbf{F}$ می‌گوییم (شکل ۳ـ۲۴).



(شکل ۳-۲۴)

ارتفاع نظیر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین محور تقارن آن است.

هرقطر دایره محور تقارن آن است. از آنچه ذکر شد می‌توان نتیجه گرفت که:

اگر یك شکل‌دارای دو محور تقارن عمود برهم باشد، دارای مرکزتقارن است (چرا؟).

تمرین

۱ـ مثلث متساوی‌الاضلاع دارای چند محور تقارن است؟

۲ـ مثلث قائم‌الزاویه در چه صورت محور تقارن دارد؟

۳ـ چهار ضلعیهایی را نام ببرید که محور تقارن داشته باشند. هریك چند محور تقارن دارد؟

۴ـ یك n ضلعی منتظم چندمحور تقارن دارد و درچه صورت دارای مرکز تقارن است؟

۵ـ دایره چند محور تقارن دارد؟ چرا؟

۶ـ نقطهٔ $\mathbf{M}$ در درون $\angle xOy$ مفروض‌است. براضلاع Ox و Oy دو نقطهٔ A و B را چنان تعیین کنید که محیط مثلث AMB دارای کوچکترین اندازهٔ ممکن باشد.

۹.۳ـ تجانس

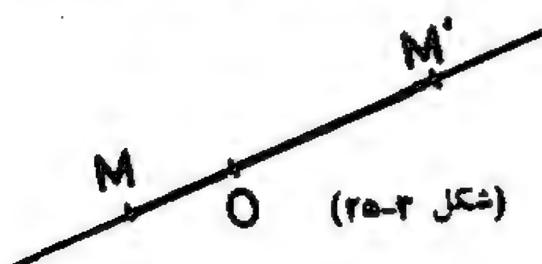
۱.۹.۳ـ عدد $k \neq 0$ ونقطهٔ ثابت O را درصفحه درنظر می‌گیریم، برای هر k متناظر با هر نقطه مفروض M نقطه‌ای چون M' می‌توان داشت چنان‌که:

۱ـ نقاط M' و O و M بریك خط راست واقع باشند.

۲ـ برحسب‌آن‌که عدد k مثبت یا منفی‌باشد، نقاط M' و M دریك طرف نقطهٔ O یا در طرفین آن اختیار شوند.

۳ـ اندازهٔ پاره‌خط OM' مساوی حاصل‌ضرب $|k|$ در اندازهٔ پاره‌خط OM باشد.

در این صورت نقطهٔ M' را مجانس نقطهٔ M در «تجانس به مرکز O ونسبت k»



(شکل ۳-۲۵)

می گوییم (شکل ۳−۲۵).

تعریف نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M در «تجانس به مرکز O ونسبت k» است هرگاه:

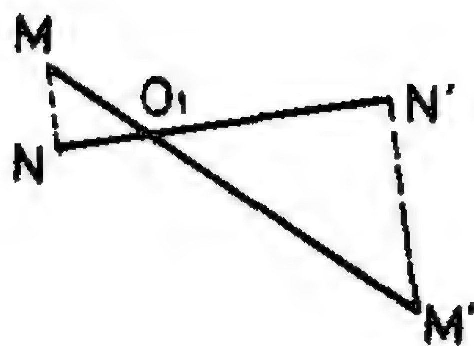
$$\overrightarrow{OM'}=k\cdot\overrightarrow{OM}$$

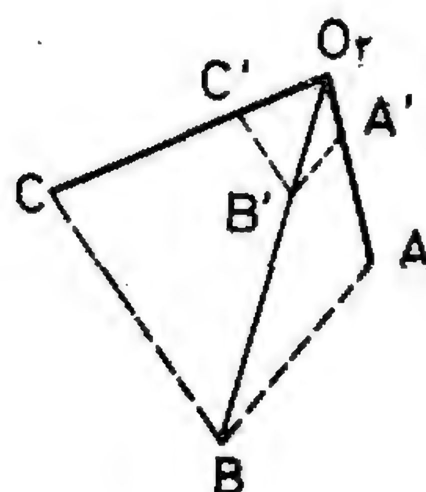
«تجانس به‌مرکز O ونسبت k» را بانماد H_O^k نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$M'=H_O^kM$$

اگر k مثبت باشد M و M' دریکطرف O بوده و تجانس را مستقیم می‌خوانند واگر k منفی باشد M و M' در طرفین O بوده وتجانس را معکوس می‌نامند. (شکل ۳−۲۶).

در شکل (۳−۲۶) نقاط M' و N' به‌ترتیب مجانسهای نقاط M و N در تجانس به‌مرکز O_1 ونسبت $k=-۲/۵$ ونقاط A' و B' و C' به ترتیب مجانسهای نقاط A و B و C در تجانس به‌مرکز O_2 ونسبت $k=\frac{۱}{۳}$ می‌باشند.





(شکل ۳-۲۶)

هر تجانس با مرکز و نسبت‌آن مشخص می‌شود. اگــر نقطه O مرکز تجانس و عدد k نسبت تجانس‌باشد، برای تعیین‌مجانس یک‌نقطه M، آن نقطه را به نقطهٔ O وصل کرده و روی نیم‌خط OM پاره خط OM' را در جهت OM یا درجهت مخالف آن، برحسب آن‌که عدد k مثبت یا منفی‌باشد، چنان درنظر می‌گیریم که $OM'=|k|\cdot OM$ باشد.

اگر نقطهٔ M' مجانس‌نقطهٔ M درتجانس با نسبت k، $(k\neq ۰)$ و مرکز O باشد، نقطهٔ M نیز مجانس نقطهٔ M' درهمان تجانس و با نسبت $\frac{۱}{k}$ است:

$$M'=H_O^kM \Longleftrightarrow M=H_O^{1/k}M'$$

تجانسهای به‌مرکز O و با نسبتهای k و k' و k'' و ... را مجموعهٔ تجانسهای هم مرکز می‌گوییم. هر تجانس از یك مجموعه تجانسهای هم مرکز، با یك عدد جبری مشخص می‌شود.

تجانس را در مجموعه نقاط یك صفحه یا اصولاً در مجموعه نقاط فضا می‌توان تعریف کرد.

۲.۹.۴- حالتهای ویژه - در تجانس به مرکز O:

۱- اگر $k=1$ باشد، $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}$ و بنابراین مجانس هر نقطه برخود آن نقطه منطبق است. یعنی $H_O^1 M=M$ پس تجانس با نسبت ۱ تجانس همانی است.

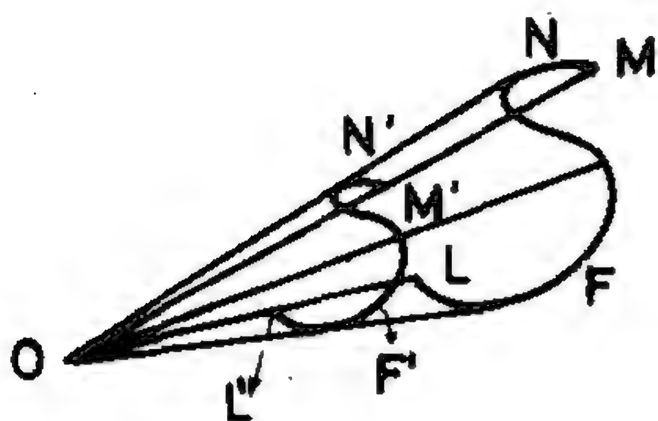
۲- اگر $k=-1$ باشد، $\overrightarrow{OM'}=-\overrightarrow{OM}$ و دو نقطه M' و M نسبت به مرکز تجانس قرینهٔ یکدیگرند. یعنی $H_O^{-1} M=S_O M$ پس تجانس با نسبت ۱- تقارن مرکزی است.

۴.۹.۴- شکلهای مجانس

تعریف - شکل F' را درصورتی‌دریك تجانس، مجانس شکل F می گوییم که هر نقطهٔ F' تبدیل یافتهٔ یك نقطه از شکل F در تجانس مزبور باشد و تبدیل یافته‌های همهٔ نقاط F را شامل باشد. این معنی را به‌صورت زیرمی‌توان نمایش داد:

$$F'=\{M' | M'=H_O^k M, M\in F\}$$

$$\Leftrightarrow F'=H_O^k F$$

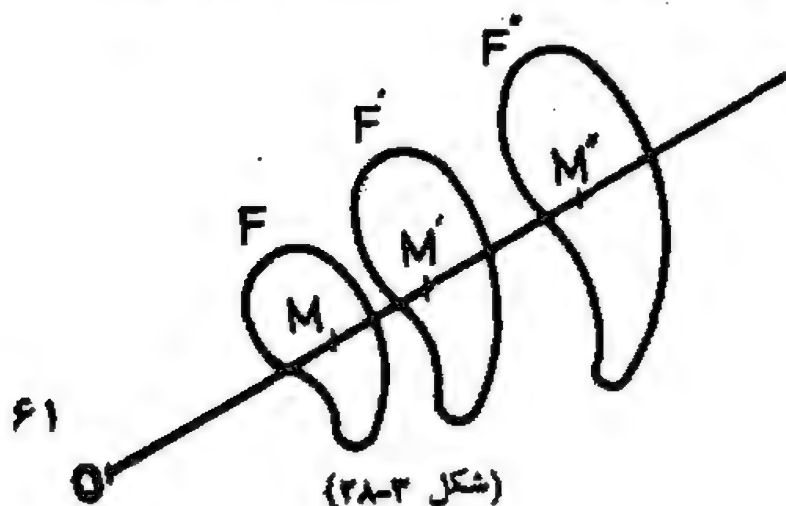


(شکل ۳-۲۷)

درشکل (۳-۲۷)، F' مجانس F درتجانس به مرکز O و نسبت کوچکتر از ۱ می‌باشد (چرا؟).

قضیه - مجانسهای هرشکل در دو تجانس‌هم مرکز، خوددر تجانسی باهمان مرکز، مجانس یکدیگرند.

برهان - اگر نقاط M' و M'' مجانسهای نقطهٔ M ازشکل F در دو تجانس به‌مرکز O و با نسبتهای k' و k'' باشند (شکل ۳-۲۸)،



(شکل ۳-۲۸)

به موجب تعریف تجانس:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM'}=k'\cdot\overrightarrow{OM}\Rightarrow M'\in OM\\ \overrightarrow{OM''}=k''\overrightarrow{OM}\Rightarrow M''\in OM\end{array}\right\}\Rightarrow O\in M'M''$$

از طرفی :

$$\left.\begin{array}{l}\overline{OM'}=k'\overline{OM}\\ \overline{OM''}=k''\overline{OM}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\overline{OM''}}{\overline{OM'}}=\frac{k''}{k'}\Rightarrow \overline{OM''}=\frac{k''}{k'}\overline{OM'}$$

و از ترکیب دو رابطهٔ اخیر خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{OM''}=\frac{k''}{k'}\overrightarrow{OM'}\Rightarrow M''=H_O^{k_1}M' \quad ; (k_1=\frac{k''}{k'})$$

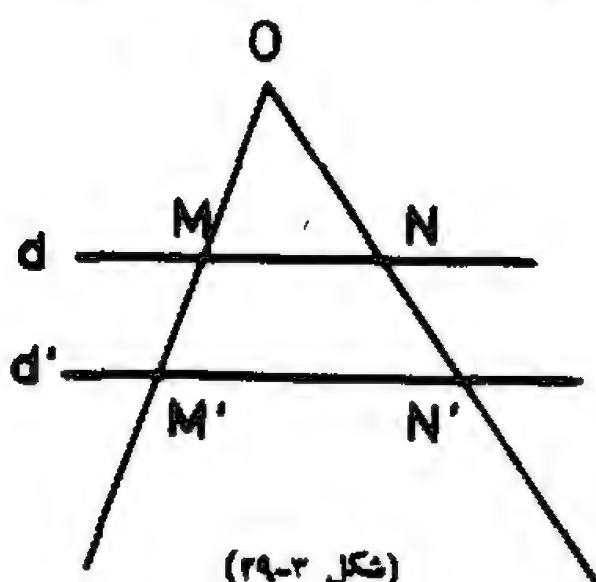
$$\overrightarrow{OM'}=\frac{k'}{k''}\overrightarrow{OM''}\Rightarrow M'=H_O^{k_2}M'' \quad ; (k_2=\frac{k'}{k''})$$

پس شکل F'' مجانس شکل F' درتجانس به مرکز O و نسبت k_1 می‌باشد.

در حالتی‌که $k'=k''$ یا $k'=-k''$ باشد، نتیجه را بحث کنید.

قضیه - مجانس هرخط راست، خط راست است.

برهان - تجانس به مرکز O و نسبت k وخط d را درنظرگرفته و نقطهٔ M' مجانس یك نقطه M از d را در تجانس مزبور تعیین می‌کنیم شکل (۳-۲۹). از نقطهٔ M' خط d' را موازی d رسم می‌کنیم. نقطهٔ دلخواه N از d را در نظر گرفته و نیم خط ON را رسم می‌کنیم تا خط d' را درنقطهٔ N' قطع کند.



(شکل ۳-۲۹)

با توجه به‌اینکه M' مجانس M درتجانس O_k است و توجه به:

$$M'N' \parallel MN$$

داریم:

$$\frac{ON'}{ON'}=\frac{OM'}{OM}=k \Rightarrow \left(\frac{ON'}{ON}=k\right)$$

در نتیجه:

$$\overrightarrow{ON'}=k\overrightarrow{ON}$$

یعنی :

$$N' = H_O^k N$$

به این معنی که مجانس هر نقطه از خط d برخط d' واقع است. برعکس بسادگی دیده می‌شود که هر نقطه از d' مجانس نقطه‌ای از d است ، پس d' مجانس d است.

نتیجهٔ ۱- مجانس هر پاره‌خط ، پاره خطی‌است موازی با آن‌که اندازه‌اش برابر است‌با حاصل‌ضرب اندازهٔ آن پاره‌خط در قدر مطلق‌نسبت تجانس (چرا؟).

نتیجهٔ ۲- مجانس هرزاویه زاویه‌ای است مساوی با آن (چرا؟).

تمرین

۱- تقارن مرکزی‌تجانس مستقیم است یا معکوس؟ چرا؟

۲- هرتجانس با چند عامل مشخص می‌شود ؟ یك مجموعه تجانسهای هم مرکـز چگونه مشخص می‌شود؟

۳- اگـر $M' = H^{3}{}_{O}M$ باشد ، تساوی $\overrightarrow{OM'} = \cdots \times \overrightarrow{OM}$ را چنان‌کامل‌کنید که گزارهٔ درست باشد.

۴- اگـر $M' = H^{1}{}_{O}M$ و $M'' = H^{\frac{1}{2}}{}_{O}M$ باشد ، چه تبدیلی نقطهٔ M'' را به M' تبدیل می‌کند. فاصلهٔ دو نقطهٔ M' و M'' را تعیین‌کنید.

۵- اگر نقاط M' و N' به‌ترتیب‌مجانسهای دو نقطهٔ M و N درتجانس به مرکز O و نسبت $k = -\frac{1}{3}$ باشند ، با فـرض $MN = 6$ سانتیمتر فاصلهٔ دو نقطهٔ M' و N' را تعیین کنید .

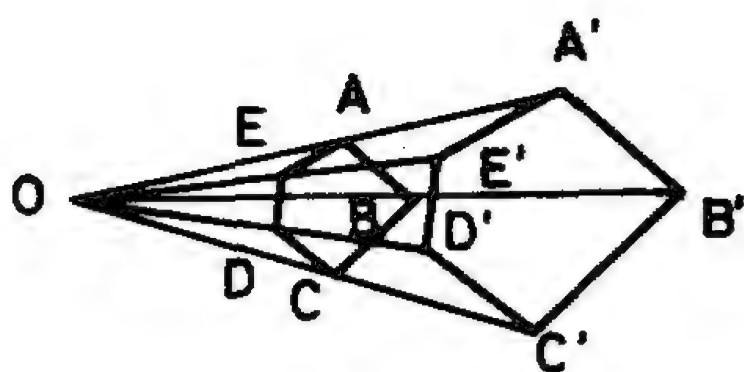
۶- آیا می‌توان دوپاره‌خط AB و $A'B'$ از یك صفحه را مجانس یکدیگر دانست؟ در چه‌صورت؟ تجانس مربوط را مشخص‌کنید.

۷- ثابت‌کنید مثلثی‌که سه رأس آن اوساط اضلاع یك مثلث باشند، مجانس‌آن مثلث در یك تجانس است. مرکز تجانس ونسبت آن را مشخص‌کنید.

۸- دوخط d_1وd_2 و نقطهٔ A را درصفحهٔ P درنظرمی‌گیریم، می‌خواهیم برنقطهٔ A خطی مرور دهیم که دوخط مزبور را به‌ترتیب درنقاط B_1 و B_2 قطع‌کند و $AB_2 = 2AB_1$ باشد. مسئله درچه‌صورت جواب دارد ؟ در حالت ویژه چه اوضاعی پیش می‌آید.

قضیه - مجانس هرچندضلعی ، چندضلعی دیگری است‌که با آن چندضلعی متشابه است‌و نسبت تشابه مساوی با قدر مطلق نسبت تجانس است و اضلاع متناظر چندضلعیها متوازیند.

برهان- به موجب آنچه قبلاً اثبات‌شد، زاویه‌های چند ضلعی و تبدیل یافته‌های آنها نظیر به نظیر متساویند و نسبت اضلاع نظیر چندضلعیها با قدر مطلق نسبت تجانس مساوی است. پس دو چند ضلعی متشابهند، (شکل ۳-۳۰).

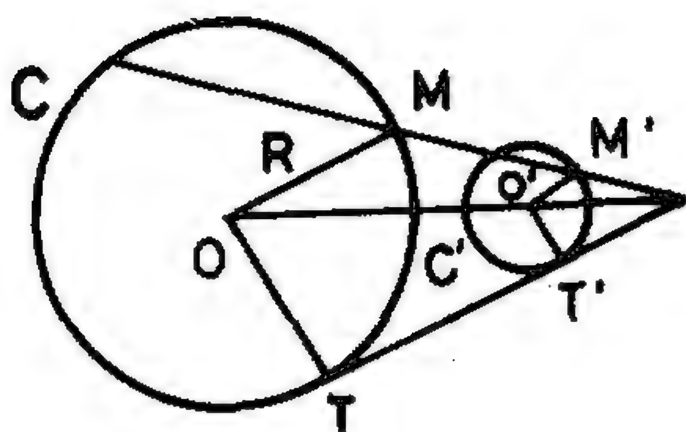


(شکل ۳-۳۰)

هرگاه چندضلعی F' (مجانس F) را در صفحهٔ تغییرمکان‌دهیم، تشابه‌بین آنهامحفوظ می‌ماند حال‌آن‌که توازی اضلاع ممکن است از میان برود. برعکس می‌توان ثابت کرد که:

شکل متشابه با یك چند ضلعی، شکلی است که بتوان آن را با تغییر مکان به صورت مجانس آن چند ضلعی تبدیل کرد.

قضیه - درهرتجانس، مجانس دایره، دایره است.



(شکل ۳-۳۱)

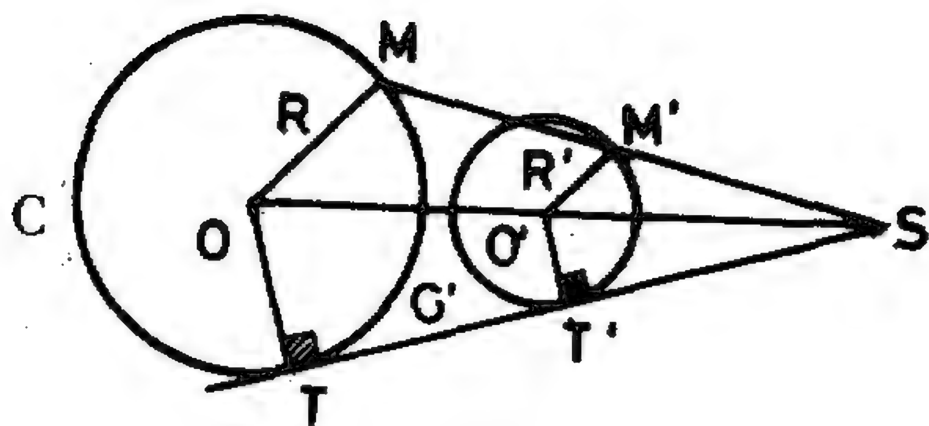
برهان- دایرهٔ $C(O,R)$ وتجانس H_S^k را درنظرمی گیریم، اگرنقطه O'مجانس مرکز دایره و نقطهٔ M'مجانس‌نقطه‌دلخواه M ازدایره باشد(شکل۳-۳۱)، به‌موجب‌آنچه اثبات‌شد:

$$O'M'=|k|\cdot OM=|k|\cdot R$$

و مقداری ثابت دارد. ازطرفی نقطهٔ O' مجانس مرکز دایره و نقطهٔ ثابتی است (چرا؟) . پس نقطه M' بردایره C' به مرکز O' وشعاع $|k|\cdot R$ واقع است برعکس بسادگی می‌توان دید که هرنقطه ازدایره C' مجانس نقطه‌ای ازدایره C می‌باشد. بنابراین:

درهرتجانس‌مجانس‌هردایره دایره‌ای است که مرکزآن مجانس مرکزدایره در همان‌تجانس وشعاع‌آن مساوی حاصل‌ضرب شعاع دایره درقدرمطلق نسبت تجانس است.

قضیه- دو دایرهٔ غیر مساوی واقع در یك صفحه به طور مستقیم یا معکوس مجانس یکدیگرند.



(شکل ۳-۳۲)

برهان ـ دایره‌های $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم (شکل ۳-۳۲). دوشعاع موازی و هم‌جهت OM و $O'M'$ از دودایره رسم می‌کنیم، اگر $R \neq R'$، دو خط MM' و OO' درنقطه‌ای مانند S یکدیگر را قطع می‌کنند و:

$$O'M' \parallel OM \Longrightarrow \Delta SO'M' \sim \Delta SOM$$

بنابراین:

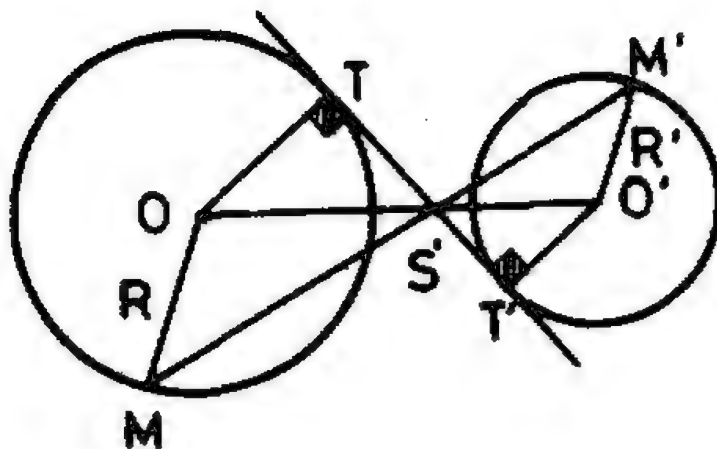
$$\frac{SM'}{SM} = \frac{O'M'}{OM} \Longrightarrow SM' = \frac{R'}{R} \cdot SM$$

با توجه به این‌که S نقطهٔ ثابتی است (چرا؟)، ودر یکطرف خط OO' می‌باشد (چرا؟) و $\frac{R'}{R}$ یك‌عدد حقیقی وثابت است‌که به‌انتخاب نقطه‌های M یا M' بر دو دایره بستگی‌ندارد، از تساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت‌که نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M درتجانس به‌مرکز S ونسبت $\frac{R'}{R}$ است. در نتیجه دایرهٔ C' مجانس دایرهٔ C در همین تجانس است، ونیز دایرهٔ Cمجانس دایرهٔ C' در تجانس به مرکز S ونسبت $\frac{R'}{R}$ است.

نقطهٔ S را مرکز تجانس مستقیم دودایره می گوییم.

اگر TT' مماس مشترك خارجی‌دودایرهٔ C و C' باشد (شکل ۳-۳۲)، OT و $O'T'$ موازی و هم‌جهت هستند و در نتیجه دو نقطهٔ T و T' در تجانس مستقیم به مرکز S و نسبت $\frac{R'}{R}$مجانس یکدیگرند پس TT' از نقطهٔ S می گذرد، یعنی، مماس مشترك خارجی دو دایره ازمرکز تجانس مستقیم‌آن دو دایره می گذرد.

اگر دردو دایرهٔ مفروض دوشعاع دلخواه موازی اما درجهات مختلف رسم کنیم، به همین ترتیب ثابت می‌شود که دو نقطهٔ انتهایی دو شعاع دریك تجانس به‌مرکز S' ونسبت $-\frac{R'}{R}$ (یا $-\frac{R}{R'}$) مجانس یکدیگرند. نقطهٔ S' خط‌المرکزین را به نسبت دو شعاع تقسیم



(شکل ۳-۳۳)

می کند و آن را مرکز تجانس معکوس دودایره می گوییم (شکل ۳-۳۳) . بدیهی است که دراین حالت شعاعها می توانند برابر باشند.

به همان طریق که در مورد مماس مشترک خارجی گفته شد مماس مشترک داخلی دودایره نیز از مرکز تجانس معکوس دایره‌ها می گذرد.

تمرین

۱- دو نقطهٔ M و M' مفروضند. آیا M' را می توان مجانس نقطهٔ M درنظر گرفت؟ درکدام تجانس؟

۲- نقطهٔ O و نقطه M' مجانس نقطهٔ M در تجانس H_O^k درصفحهٔ P مفروضند، نقطهٔ A را دراین صفحه درنظر گرفته ومجانس آن را درتجانس H_O^{-k} به وسیلهٔ ترسیم تعیین کنید.

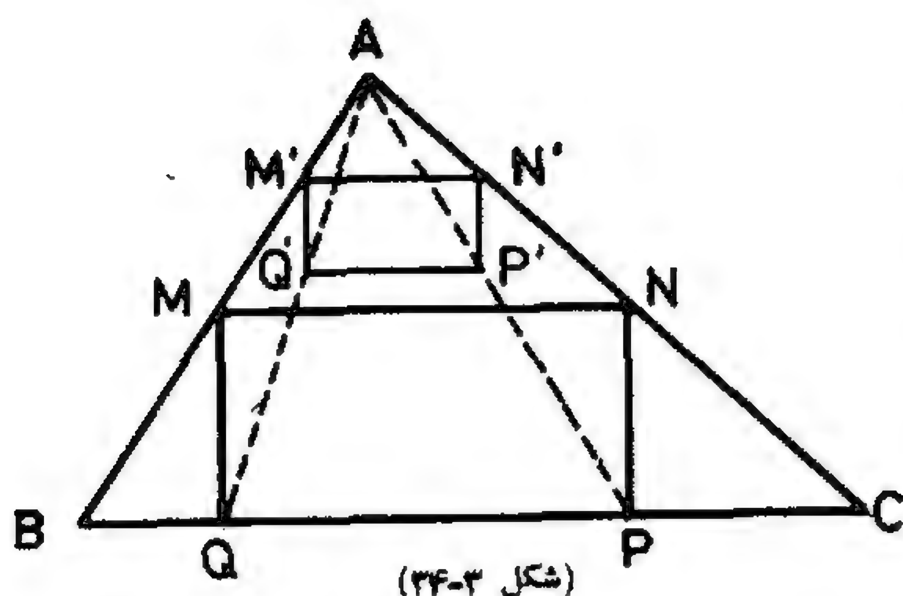
۳- $\angle xOy$ مفروض است، نقطهٔ A را برضلع Ox اختیار کرده‌ایم. می‌خواهیم دوپاره خط موازی چنان رسم کنیم که هردو به دو ضلع زاویه محدود باشند و ابتدای یکی برنقطهٔ A واقع باشد واندازهٔ یکی دوبرابر دیگری باشد. مسئله چند جواب دارد؟

نمونه‌هایی ازکاربرد تجانس درحل مسئله‌های هندسه

تعریف- مستطیل یا مربعی را که یك ضلع آن بریکی ازاضلاع مثلثی منطبق باشد ودورأس دیگرش بردوضلع دیگرمثلث واقع باشند محاط درمثلث می گوییم. درحقیقت چهاررأس هرچهار ضلعی محاط دریك مثلث براضلاع مثلث واقع هستند واما درهرحال دورأس آن بریك ضلع مثلث واقع خواهند بود.

مسئلهٔ ۱- درمثلث مفروض مستطیلی محاط کنید که اندازهٔ یك ضلع آن دوبرابر اندازهٔ ضلع دیگرش باشد.

حل- فرض می کنیم مستطیل $MNPQ$ درمثلث ABC محاط باشد (شکل ۳-۳۴). در این صورت پاره‌خطهای AP و AQ را وصل می کنیم و برپاره خط دلخواهی مانند $M'N'$



(شکل ۳-۳۴)

که موازی BC رسم می‌شود ودوسر آن براضلاع AB و AC واقعند مستطیل $M'N'P'Q'$ را بنا می‌کنیم که رأس P' آن برپاره خط AP واقع بوده ودر نتیجه رأس Q' آن بسر پاره خط AQ واقع شود (چرا؟). این مستطیل مجانس مستطیل MNPQ درتجانس به‌مرکز A است (چرا؟)؛ ودراین صورت :

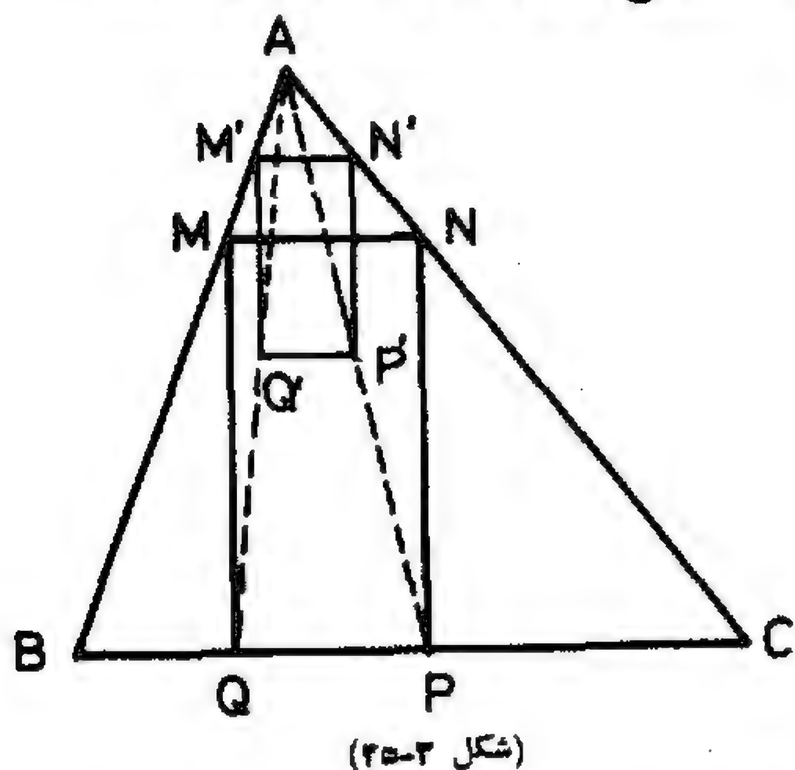
$$\frac{M'N'}{MN}=\frac{AN'}{AN}=\frac{N'P'}{NP} \Longrightarrow \frac{M'N'}{N'P'}=\frac{MN}{NP}=۲ \Longrightarrow N'P'=\frac{۱}{۲}M'N'$$

است. ازاینجا راه حل مسئله به‌طریق زیرمشخص می‌شود.

خطی موازی ضلع BC ازمثلث رسم می‌کنیم تا دوضلع AB و AC را درنقاط M' و N' قطع کند. دراین دونقطه دوعمود بر $M'N'$ رسم می‌کنیم و بر آنها دو پاره خط $N'P'$ و $M'Q'$ را چنان جدا می‌کنیم که :

$$N'P'=M'Q'=\frac{۱}{۲}M'N'$$

(شکل ۳-۳۴) پاره‌خطهای AP' و AQ' را رسم می‌کنیم تا BC را در نقاط P و Q قطع کنند. این دو نقطه دو رأس از مستطیل مطلوب هستند.

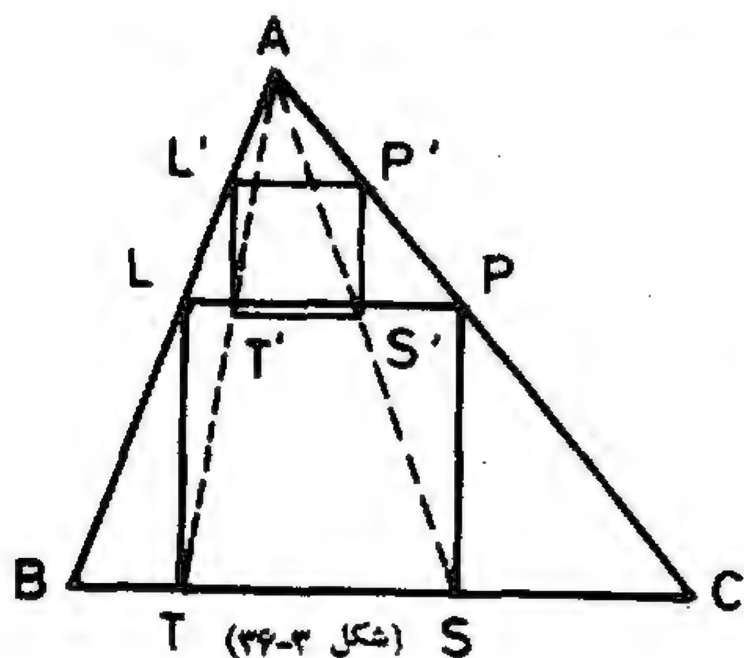


(شکل ۳-۳۵)

اگر بر عمودهای مرسوم بر $M'N'$ دوپاره خط به اندازه‌هایی مساوی $۲M'N'$ جدا کنیم، به همان ترتیب مستطیل دیگری محاط در مثلث می‌توان رسم کردکه اندازهٔ یکی‌ازاضلاع آن دو برابر انـدازهٔ ضلع دیگر است (شکل ۳-۳۵).

مسئلهٔ ۲- در مثلث مفروض مربعی محاط کنید.

حل- با توجه به‌شکل(۳-۳۶). وروش حل مسئلهٔ ۱ راه ترسیم‌مربع را بیان‌کنید.

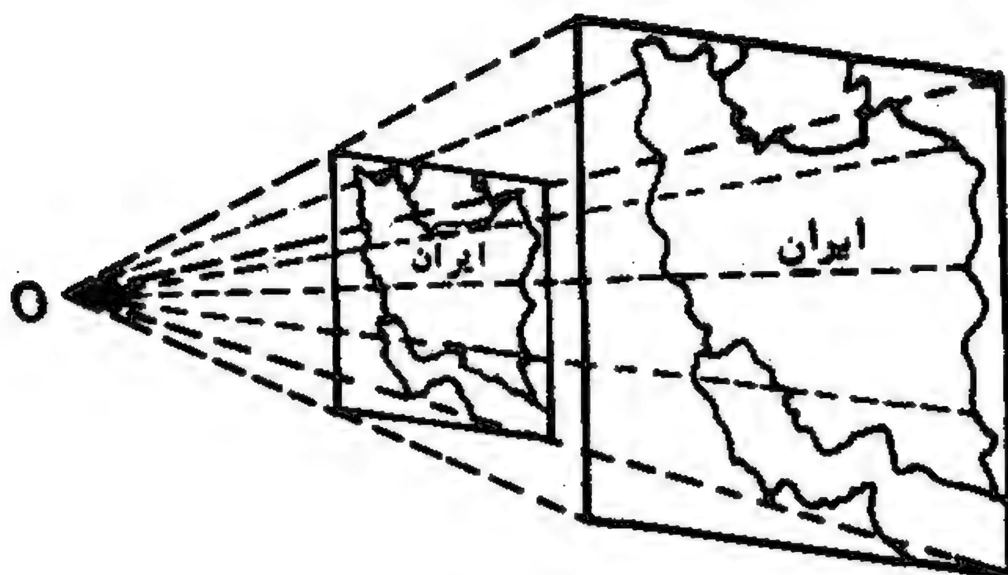


(شکل ۳-۳۶)

کاربردهای عملی تجانس

نمونهٔ ۱- شما همه با سینما آشنا هستید و تصویرهایی را که بر پرده می‌افتند می‌شناسید. این تصویرها مجانسهای تصویرهای بسیار کوچکی هستند که روی فیلم چاپ شده‌اند. مرکز تجانس چراغ نورافکن و نسبت تجانس عددی است نسبتاً بزرگ، شاید ۱۰۰ یا ۲۰۰ یا ۱۰۰۰ و این عدد به‌فاصلهٔ پرده از دستگاه تصویراندازی بستگی دارد.

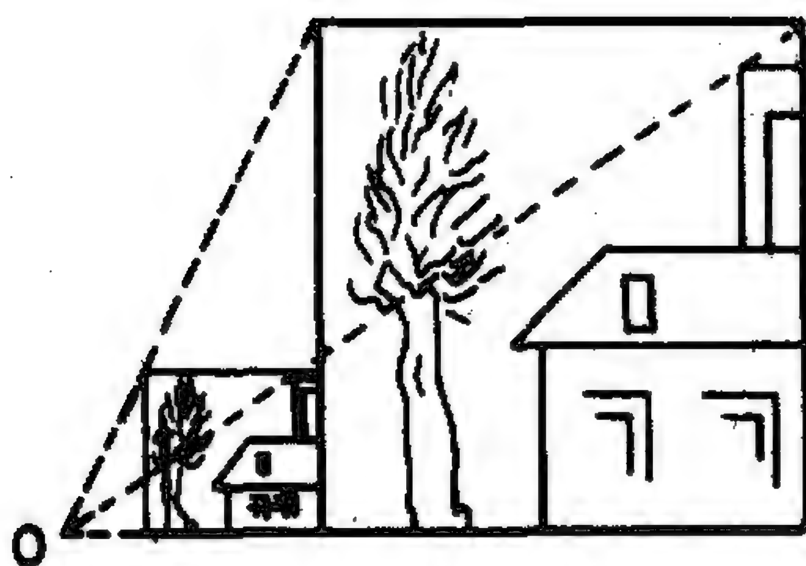
نمونهٔ ۲- عکس کوچکی را پهلوی بزرگ شدهٔ همان عکس بگذارید و با دقت به آنها نگاه کنید. آیا می‌دانید عکس بزرگ چگونه تهیه شده است؟ با ابزاری شبیه به دستگاه تصویر انداز سینما، که در فن عکاسی آن را بزرگ‌کننده (آگراندیسور) می‌گویند، مجانس عکس را با نسبت معین تهیه می‌کنند (شکل ۳-۳۷).



(شکل ۳-۳۷)

نمونهٔ ۳- در ترسیم نقشه و تصویر برای کوچك کردن شکلها می‌توان از تجانس استفاده کرد. در این صورت نسبت تجانس را مقیاس نقشه می‌خوانند.

فرض کنیم می‌خواهیم تصویری را سه بار کوچک کنیم. کافی است نقطه‌ای مانند O روی صفحهٔ شکل اختیار کنیم، (شکل ۳-۳۸) و آن را مرکز تجانس قرار دهیم و مجانسهای بعضی نقطه‌های اصلی و مشخص شکل را در تجانس به‌مرکز O و نسبت ۳ تعیین کنیم و آنها را به یکدیگر وصل نماییم.



(شکل ۳-۳۸)

مجانس نگار ـ مجانس نگار یا پانتوگراف[1] وسیله‌ای است که برای رسم مجانسهای شکلها به‌کار می‌رود.

اصول ساختمان مجانس نگار بر ویژگیهای متوازی‌الاضلاع و مثلثهای متشابه بنیاد شده است. در شکل (۳-۳۹) متوازی‌الاضلاع $ABCM$ را در نظر بگیرید. اگر نقاط O و A و B و C و M و M' چنان اختیارشده باشند که $\frac{OA}{AM}=\frac{OB}{BM'}$ باشد:

$$(\triangle OAM \sim \triangle OBM') \Longrightarrow \angle AOM = \angle BOM'$$

بنابراین سه نقطهٔ O و M و M' بر یك خط راست واقعند، از طرفی:

$$\frac{OM'}{OM}=\frac{BM'}{AM}=\frac{BM'}{BC}$$

پس اگر نقطهٔ C را بر پاره خط BM' چنان اختیار کنیم که $\frac{BM'}{BC}=k$ باشد، درهرحال:

$$\overrightarrow{OM'}=k\cdot\overrightarrow{OM}$$

(شکل ۳-۳۹)

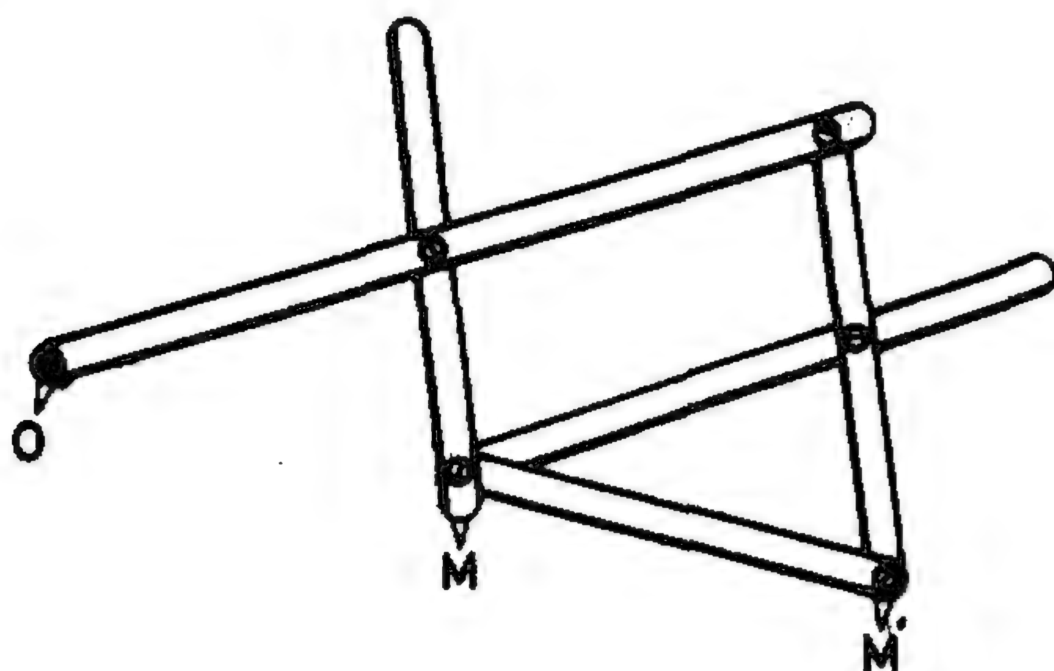
است. یعنی نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M در تجانس بمرکز O ونسبت معین k است. پس اگر نقطهٔ M بر یك شکل F تغییرمکان دهد، نقطهٔ M' مجانس آن شکل را به نسبت k بزرگتر از آن رسم می‌کند.

در ساختمان پانتوگراف تیغه‌های فلزی یا پلاستیکی OA و BM' و AM و CM را چنان تعبیه می‌کنند که دو تیغهٔ کوچك در نقاط A و C به دو تیغهٔ بزرگ مفصل می‌شوند و با پیچهایی در نقاط معین از دو تیغهٔ اول محکم می‌شوند. درنقطهٔ O به این تیغه یك سوزن ثابت نصب است و در نقطهٔ M نیز سوزن متحرکی قرار دارد و در نقطهٔ M' جای قرار دادن مداد یا قلم تعبیه شده است.

برای ترسیم مجانس یك شکل با نسبت k کافی است که دستگاه را چنان تنظیم کنیم که $AM=BC$ و $AB=CM$ باشد. (تا $ABCM$ متوازی‌الاضلاع باشد) و اندازه‌های پاره‌خطهای AB و BC چنان اختیار شوند که $\frac{OB}{OA}=k$ باشد، در این‌صورت وقتی‌سوزن O دستگاه را درنقطه‌ای از صفحهٔ شکل ثابت نگاه داریم و نقطهٔ M بریك‌شکل F جابه‌جا شود،

۱ـ Pantographe

نوك مداد نصب شده درنقطهٔ M' مجانس آن شکل را با نسبت k رسم می‌کند (شکل ۳-۴۰)



(شکل ۳-۴۰)

تمرین

۱- دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ و نقطهٔ M درصفحهٔ P مفروضند، می‌خواهیم بر نقطهٔ M خطی‌مرور دهیم که دو دایره را درنقاط A و A' قطع کند و $MA'=۳MA$ باشد. مسئله در چه‌صورت جواب دارد؟

۲- وتر AB از دایرهٔ $C(O,R)$ ونقطهٔ M بر آن دایره مفروضند، وتری از دایره رسم کنید که یك سرآن نقطهٔ M باشد و به وسیلهٔ وتر AB به دوپاره خط بـه نسبت ۲ و ۱ تقسیم شود. (شرط وجود جواب چیست؟ مسئله چند جواب دارد؟)

۳- بر نقطهٔ تقاطع دو دایره خطی مرور دهید که اندازه‌های وترهای دو دایـره برآن خط به‌نسبت ۳ و ۱ باشند. (همین مسئله را چنان درنظر بگیرید که وترهای مزبور مساوی باشند.)

۴- دو دایرهٔ هـم مرکز مفروضند. خطی رسم کنید که هریك از دو دایره را در دو نقطه قطع کند و اندازه‌های وترهای دو دایره برآن خط با دو عدد مفروض m و n متناسب‌باشند. (درحالت ویژه مسئله را چنان حل کنید که نسبت وترها مساوی نسبت شعاعهای دو دایره باشد.)

۵- مجموعهٔ مثلثهایی راکه در آنها دو رأس B و C نقاط ثابت صفحه و $\angle A$ آنها نیز مقدار ثابت دارد درنظر گـرفته مکان هندسی نقاط همرسی ارتفاعهای آنها را تعیین‌کنید. این مکان هندسی مجانس معکوس قسمتی از دایرهٔ محیطی مثلث است. آن قسمت را مشخص‌کنید.

۶- در مجموعهٔ مثلثهای مسئلهٔ قبل مکان هندسی‌نقطهٔ همرسی میانه‌ها را تعیین‌کنید.

۷- در مثلث مفروض مستطیلی محاط‌کنید‌که زاویهٔ بین قطر وضلع بزرگ آن $۳۰°$ باشد.

۳

خواندنی

دکارت

رنه‌دکارت، حکیم و فیلسوف و ریاضی‌دان فرانسوی در ۱۱ فروردین ۹۷۵ چشم به دنیا گشود و در ۲۲ بهمن ۱۰۲۸[1] در استکهلم درگذشت. پدرش او را برای تحصیل علوم قدیمی به‌کشیشان ژزوئیت سپرد و او ازسال ۹۸۳ تا هشت سال نزد آنان مطالبی آموخت و دراین میان دل به‌ریاضیات سپرد. ازسال ۹۹۷ تا ۱۰۰۸ به‌سیر آفاق وانفس پرداخت ودر ضمن ریاضیات وفلسفه آموخت.

درسال ۹۹۸ آثار یك تحول، بلکه یك انقلاب عقلی و علمی در او ظاهر شده بود و این وضع اساس یك فلسفهٔ خاص قرار گرفت. ازسال ۱۰۰۸ درکشور هلند مقیم شد تافلسفهٔ خود را قوام بخشد وآن را درمحافل مختلف زمان رسوخ دهد. دراین میان سه‌بار و هر بار برای مدتی کوتاه، به‌پاریس سفرکرد ودرسفر دوم با پاسکال معروف، فیلسوف و ریاضی‌دان زمان، برخوردکرد وبه وی توصیه نمودکه دربارهٔ خلأ به‌آزمایش بپردازد.

درآن‌زمان نفوذکشیشان‌کار را بردانشمندان دشوار ومیدان را برآنان تنگ‌می‌کرد، تا جایی‌که گالیله در ایتالیا به‌مناسبت اندیشه‌های علمی خود به محاکمه خوانده شد. وقتی که دکارت درسال ۱۰۲۱ ازمحکوم شدن گالیله‌آگاه شد، دربارهٔ عرضه کردن عقاید خود راه احتیاط پیش‌گرفت. با این وجود، هنگامی که کتاب «رسالهٔ عالم» را منتشرکرد مورد نکوهش و حملهٔ بی‌امان طرفداران ارسطو و کشیشان ژزوئیت فرانسه‌وهلند قرار گرفت و سنای هلند تعلیم آثار او را ممنوع اعلام‌کرد زیراکه معتقد بودکه آثار مزبور «جوانان‌را ازفلسفهٔ کهن و سالم باز می‌داشت.»

کار مهم دکارت در ریاضیات ابداع هندسهٔ تحلیلی است، یعنی بررسی گزاره‌های‌هندسی به‌کمك اصول محاسبه و جبر. دراین هندسه، چنان‌که می‌دانید، هر نقطهٔ صفحه با یك جفت عدد مشخص می‌شود و هر نقطهٔ فضا با سه عدد شناخته می‌گرددکه آن اعداد رامختصات‌نقطه

۱ـ تاریخها همه به هجری شمسی است. به‌تاریخ میلادی تولد و درگذشت دکارت را به‌سالهای ۱۵۹۶ و ۱۶۵۰ نوشته‌اند.

می‌گویند. محورهـای مختصات قائم‌الزاویه را محورهای دکارتی و مختصات نقطه را در دستگاههای قائم مختصات دکارتی نقطه می‌نامند.

در زبانهای خارجی مختصات نقطه را در دستگاه قائم، « مختصات کارتِزیَن » نقطه می‌گویند وکلمهٔ کارتزین از نام لاتینی کارتزیوس گرفته شده‌که به‌جای دکارت به کار می‌رود. درکتابهای ریاضی به‌زبان فارسی نیز گاهی با اصطلاح «مختصات کارتزین نقطه» برخورد می‌کنیم.

دکارت در زمان حیات خویش در فلسفه و ریاضیات شهرت زیاد کسب‌کرد و در سال ۱۰۲۸ به‌دعوت کریستی‌یَن ملکهٔ سوئد به‌استکهلم پایتخت‌آن کشور سفرکرد واورا باعزت واحترام بسیار پذیرا شدند، اما آب وهوای سوئد بامزاج ضعیف و بدن نحیف وی سازگار نبود وسرانجام وی را ازپای درآورد.

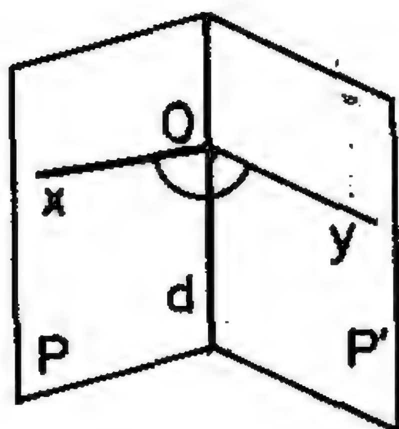
فصل چهارم

شکلهای فضایی

۱.۴ـ کنجها

۱.۱.۴ـ یادآوری ازهندسهٔ فضایی ـ هندسهٔ فضایی بخشی ازهندسه است که درآن ازشکلهای سه بعدی، یعنی شکلهایی که همهٔ نقاط آنها دریك صفحه واقع نیستند، سخن می‌رود. ساده‌ترین این شکلها فرجه است.

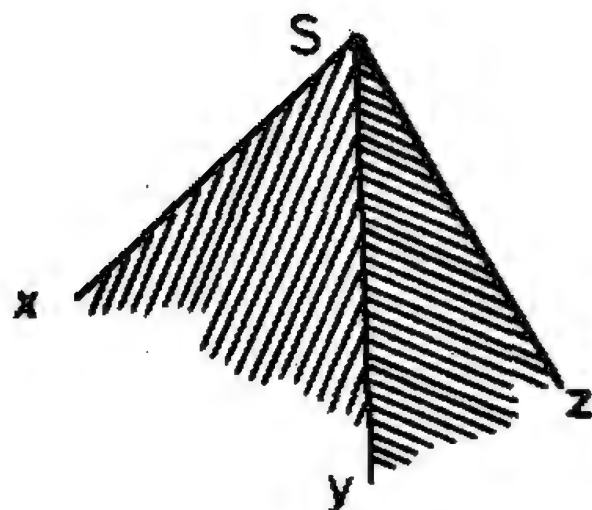
۲.۱.۴ـ فرجه ـ فرجه زیر مجموعه‌ای از نقاط فضا است که بین دونیم صفحه با مرز مشترك محدود باشد (شکل ۴ـ۱).



(شکل ۴-۱)

هریك ازدونیم صفحه را یك‌وجه، وفصل مشترك دونیم صفحه را یال فرجه نامیده‌ایم. فرجهٔ بین‌دونیم صفحهٔ (d,P)و(d,P') رابانماد (PdP') نمایش می‌دهیم، وهرجاکه اشتباهی رخ ندهد، فرجه را تنها با یك حرف یا دوحرف از یال آن می‌خوانیم؛ مثلا در شکل ۴ـ۱ فرجهٔ (PdP') را می‌خوانیم «فرجهٔ d».

اندازهٔ فرجه بااندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔآن مشخص می‌شود. زاویهٔ مسطحهٔ فرجه زاویه‌ای‌است که‌اضلاعش در دو وجه فرجه و دریك نقطه از یال، بر یال فرجه عمود باشند، مانند $\angle xOy$ درشکل (۴ـ۱).



(شکل ۴-۲)

۳.۱.۴ـ کنج ـ کنج زیر مجموعه‌ای از فضاست که از اجتماع چند زاویه پدید می‌آید، چنان‌که آن زاویه‌ها، رأس‌مشترك دارند وهریك‌ازآنها درهرضلع بایك زاویهٔ دیگر و تنها با همان زاویه ضلع مشترك

دارد وهیچ دو زاویه‌ای دریك صفحه واقع نیستند. مانند کنجی که درشکل (۴-۲) دیده می‌شود.

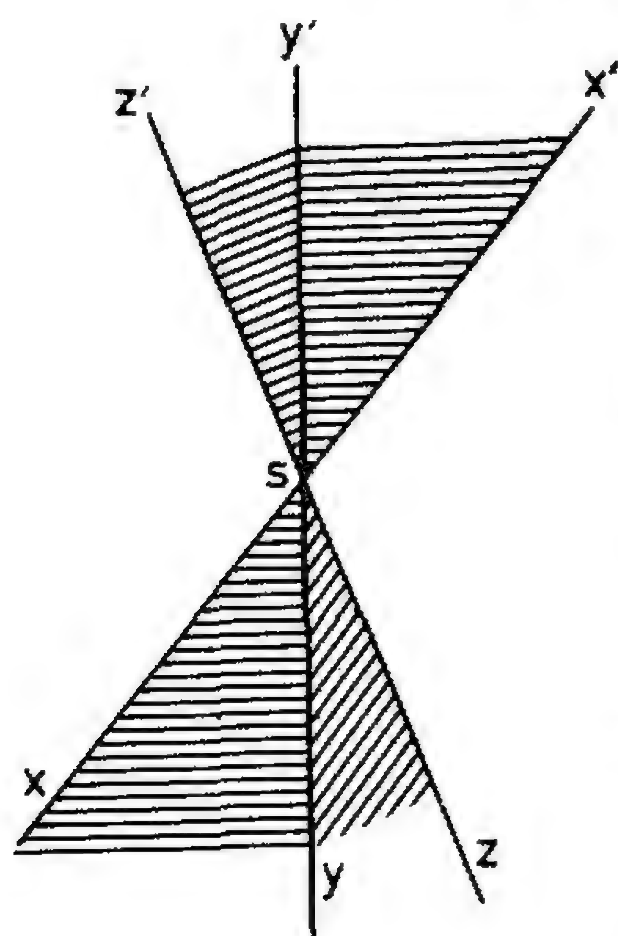
ساده‌ترین کنجها باسه نیم خط که آغاز مشترك داشته ودریك صفحه واقع نباشند مشخص می‌شود.

درهر کنج رأس مشترك زاویه‌ها را رأس، قسمتی از صفحهٔ هرزاویه راکه بین دو ضلع آن محصوراست، وجه، ضلع مشترك هر دوزاویهٔ مجاور را یال و فرجهٔ بین هر دو وجه مجاور را که با سایریالها دریك طرف این دووجه کنج قراردارد، یك فرجهٔ کنج می گوییم.

هر کنج با رأس ویالها مشخص می‌شود. ازاین روی درنمایش هندسی معمولاً هر کنج را با رأس ویك نقطه ازهریال نشان می‌دهیم. مانندکنج Sxyz درشکل ۴-۲.

کنج گوژ یا محدب آن است که همهٔ وجوه ویالهای‌آن دریك طرف هروجه دلخواه ازآن واقع باشند، واین درصورتی است که اندازهٔ هر فرجهٔ آن کوچکتر از °۱۸۰ باشد. کنجی که حتی یك فرجهٔ بزرگتر از °۱۸۰ داشته باشد، کنج کاو یا مقعر است.

کنجهای قرینه ـ دو کنج که رأس مشترك داشته ویالهای آنها دو به‌دو دریك امتداد اما در جهات مختلف باشند، کنجهای قرینه نامیده می‌شوند. کنج قرینهٔ هرکنج ازامتداد دادن‌یالهای آن پدید می‌آید. درشکل مقابل کنجهای Sxyz و Sx′y′z′ قرینهٔ یکدیگرند.



کنج منتظم ـ کنج منتظم آن است که همهٔ زاویه‌های آن با هم وهمهٔ فرجه‌های آن نیز با یکدیگر مساوی باشند. ثابت می‌شود که اگر زاویه‌های یك کنج متساوی باشند فرجه‌های‌آن نیز باهم مساویند. پس اگر درکنج Sxyzu شکل۴-۳

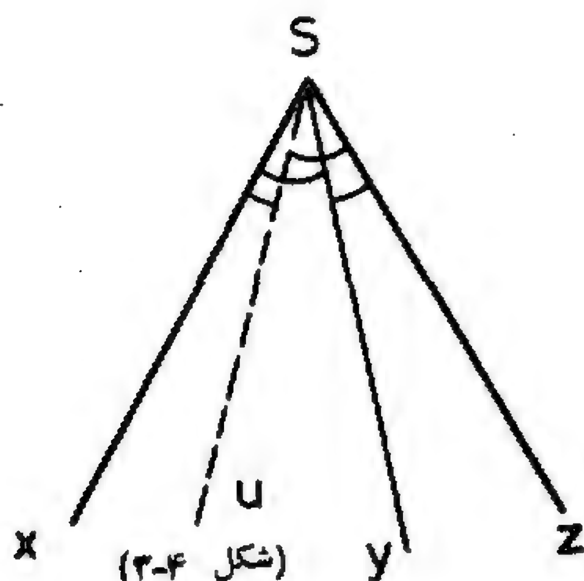
$$\angle xSy = \angle ySz = \angle zSu = \angle uSx$$

باشد، کنج مزبورمنتظم است.

کنجها را با توجه به تعداد وجه‌های‌آنها، کنج سه وجهی، کنج چهار وجهی و... یا کنج n وجهی می گوییم.

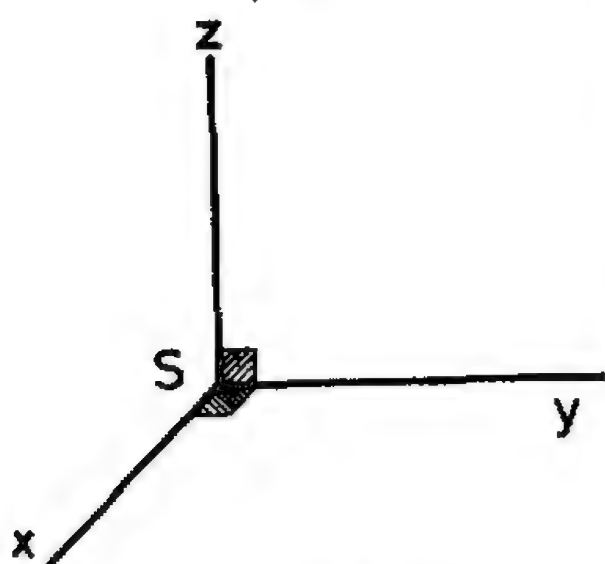
کنج سه وجهی ـ کنج سه‌وجهی ساده‌ترین کنجها است، زیراکه باکمتر ازسه وجه اصولاً کنج تشکیل نمی‌شود و از برخورد دو صفحه فقط یك فرجه پدید می‌آید نه کنج.

کنج سه وجهی، سه وجه، سه یال، سه‌زاویه، سه فرجه ویك رأس دارد ومی‌توان گفت:



(شکل ۴-۳)

کنج سه وجهی با سه نیم‌خط همرس غیرواقع بریك صفحه مشخص می‌شود.



(شکل ۴-۴)

کنج سه قائمه ـ هر کنج سه وجهی را که هرسه زاویهٔ آن قائمه باشند، کنج سه‌قائمه می‌گوییم. مانند کنج $\mathbf{Sxyz}$ درشکل (۴ـ۴).

هریال ازکنج سه‌قائمه بروجهی که شامل آن‌نیست عمود است، (چرا؟)؛ وجه‌های هرکنج سه‌قائمه دوبه‌دو بریکدیگر عمودند، (چرا؟)؛ بنابراین هرسه فرجهٔ کنج سه قائمه، فرجه‌های قائمه‌اند.

کنج‌سه قائمه یك‌کنج منتظم است.

تمرین

۱ـ مجموع زاویه‌های یك کنج چهار وجهی منتظم $240°$ است. اندازهٔ هرزاویهٔ آن را تعیین کنید.

۲ـ آیا کنج سه وجهی می‌تواند کاو باشد؟ چرا؟

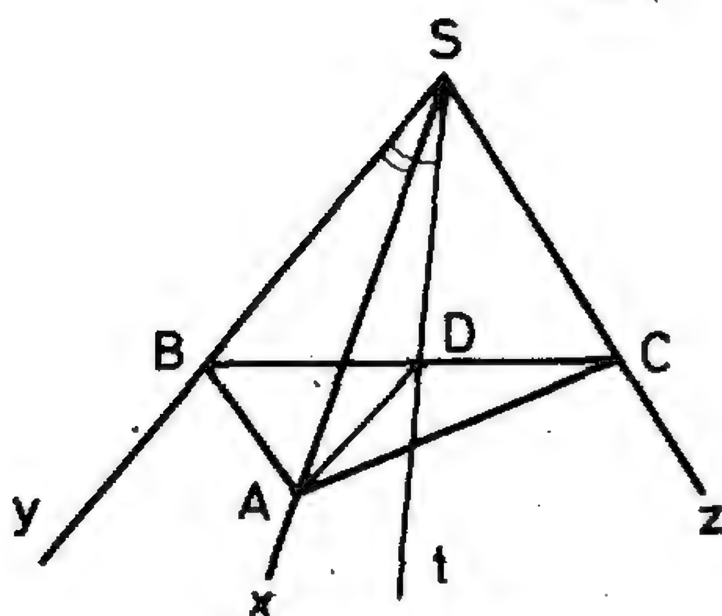
۳ـ دریك‌کنج چهاروجهی اندازه‌های دوفرجهٔ مجاور $10°$ و $215°$ است. این‌کنج گوژ است یاکاو؟ چرا؟

۴ـ زاویهٔ قائمهٔ $\mathbf{xOy}$ را درنظر گرفته ودرنقطهٔ $\mathbf{O}$ برصفحهٔ $\mathbf{xOy}$ نیم‌خط $\mathbf{Oz}$ را عمود می‌کنیم. کنج $\mathbf{Oxyz}$ چگونه کنجی است؟ زاویه‌ها وفرجه‌های‌آن را تعیین کنید.

۵ـ اندازهٔ زاویهٔ $\mathbf{xOy}$ مساوی $60°$ است. در نقطهٔ $\mathbf{O}$ نیم‌خط $\mathbf{Oz}$ را بر صفحهٔ $\mathbf{xOy}$ عمود می‌کنیم، زاویه‌ها وفرجه‌های‌کنج $\mathbf{Oxyz}$ را تعیین کنید.

۶ـ چهار نیم‌خط دریك نقطه همرسند وهیچ سه‌تای‌آنها دریك صفحه واقع نیستند، درنقطهٔ همرسی بااین نیم‌خطها چندکنج مشخص می‌شود؟ آنها را نام ببرید.

۴.۱.۴ـ ویژگیهای کنج سه وجهی



(شکل ۴-۵)

قضیهٔ۱ـ در هر کنج سه وجهی هر زاویه از مجموع دوزاویهٔ دیگر کوچکتراست.

برهان ـ اگر کنج منتظم باشد، قضیه روشن است، پس قضیه را برای حالتی ثابت می‌کنیم که یك زاویه ازهریك ازدوزاویهٔ دیگر بزرگتر باشد. اگر $\angle \mathbf{ySz}$ بزرگترین زاویهٔ کنج سه‌وجهی $\mathbf{Sxyz}$ باشد (شکل۴ـ۵)

درصفحهٔ آن نیم خط St راچنان رسم می‌کنیم که $\angle ySt = \angle ySx$ ، حال بر دو نیم خط Sx و St به ترتیب دو پاره خط SA و SD را مساوی یکدیگر جدا کرده و فرض می‌کنیم صفحهٔ اختیاری P که پاره خط AD را شامل است نیم خطهای Sy و Sz را به ترتیب در نقاط B و C قطع کند دراین صورت:

$$\triangle ASB = \triangle DSB \quad \text{(ض‌زض)}$$

بنابراین

$$BA = BD$$

درمثلث ABC :

$$[AC > BC - BD] \Rightarrow AC > DC$$

ودر دو مثلث SAC و SDC ،

$$(SA = SD \text{ و } SC = SC \text{ و } AC > DC) \Rightarrow \angle ASC > \angle DSC$$

باتوجه به‌آن‌که دوزاویهٔ BSD و BSA متساویند (چرا؟). می‌توان داشت:

$$\angle ASC + \angle BSA > \angle BSD + \angle DSC$$

یا

$$\angle ASC + \angle BSA > \angle BSC$$

ازاین نامساوی می‌توان نتیجه‌گرفت

$$\angle ASC > \angle BSC - \angle BSA$$

یعنی: در هرکنج سه وجهی هرزاویه ازتفاضل دو زاویهٔ دیگر بزرگتر است.

قضیه۴- در هر کنج سه وجهی مجموع سه زاویه از چهارقائمه کوچکتر است.

برهان- یال Sy ازکنج سه وجهی Sxyz (شکل ۴-۶) را از رأس S درجهت مخالف آن امتداد می‌دهیم، کنج سه وجهی Sy'xz پدید می‌آید.

(شکل ۴-۶)

دراین‌کنج به موجب قضیه قبل

$$\angle xSz < \angle y'Sz + \angle y'Sx$$

اما

$$\widehat{y'Sz} = 180^\circ - \widehat{ySz}$$

$$\widehat{y'Sx} = 180^\circ - \widehat{xSy}$$

واگر اندازه‌های دوزاویه را درنامساوی بالاقرار دهیم حاصل می‌شود:

$$\widehat{xSz} < 180^\circ - \widehat{ySz} + 180^\circ - \widehat{xSy}$$

یا

$$\widehat{xSz} + \widehat{ySz} + \widehat{xSy} < 360^\circ$$

تمرین

۱- سه نیم خط دریك نقطه همرسند وزاویه‌های بین‌آنها به‌ترتیب °۳۰ و °۷۵ و °۱۰۵ است. آیا بااین سه نیم خط درنقطهٔ O کنجی پدید می‌آید؟ چرا؟

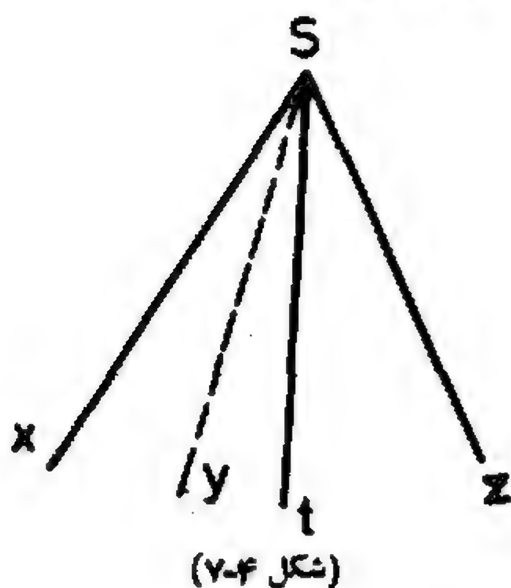
۲ـ سه نیم‌خط همرسند و زاویهٔ بین‌هردوتا ازآنها 60° است. آیا با این‌سه‌نیم خط کنجی مشخص می‌شود؟ چرا ؟

۳ـ اندازه‌های دو زاویـه از یك‌کنج سه وجهی 72° و 48° است. مجموعهٔ اندازه‌های ممکن برای زاویهٔ سوم‌کنج را تعیین‌کنید.

۴ـ در کنج سه‌وجهی منتظم $Sxyz$ کـه هریك از زاویه‌های آن 60° است بر یال Sx نقطهٔ A را به فاصلهٔ a از رأس S اختیار کرده و در این نقطه صفحه‌ای بر یال Sx عمود رسم می‌کنیم. این صفحه یالهای Sy و Sz را در نقاط B و C قطع می‌کند. اضلاع مثلث ABC را برحسب a تعیین‌کنید. به‌کمك این مثلث کسینوس مسطحهٔ فرجهٔ Sx ازکنج را تعیین کنید. از محاسبه چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟ آیا می‌توانید بگویید فرجه‌های این‌کنج متساوی هستند؟

۴.۱.۵ـ ویژگیهای کنج چند وجهی

قضیهٔ ۱- در هرکنج‌گوژ هرزاویه از مجموع زاویه‌های دیگرکوچکتر است.



(شکل ۴-۷)

برهان‌ـ فرض‌می‌کنیم $\angle xSt$ بزرگترین زاویهٔ‌کنج گوژ $Sxyzt$ باشد (شکل ۴ـ۷)، صفحهٔ xSz این کنج را به دوکنج سه‌وجهی تجزیه می‌کند. درکنج $Sxzt$:

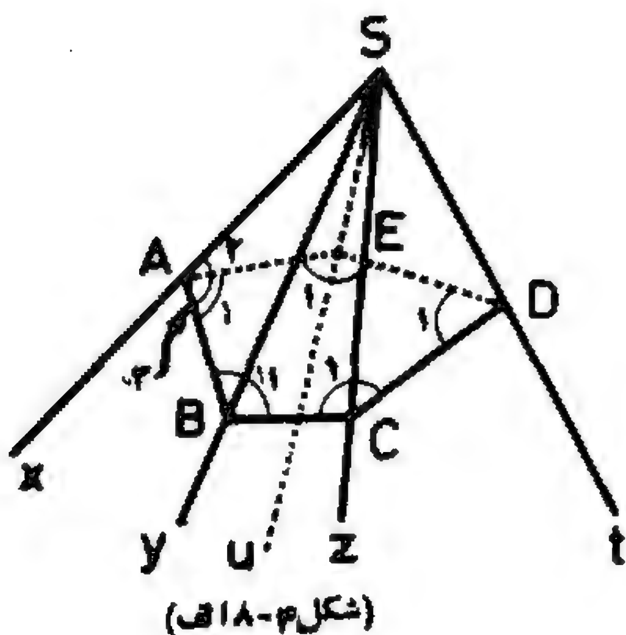
$$\angle xSt < \angle xSz + \angle tSz$$

و درکنج $Sxzy$:

$$\angle zSx < \angle xSy + \angle ySz$$

اگر این دو نامساوی را عضو به عضو باهم جمع‌کنیم حاصل می‌شود:

$$\angle xSt < \angle tSz + \angle xSy + \angle ySz$$



(شکل۴-۸الف)

درکنجهایی که بیش از چهار وجه دارند نیـز قضیه به‌همین صورت ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۲- در هرکنج‌گوژ مجموع زاویه‌ها کوچکتر از 360° است.

برهان ـ اگر صفحهٔ دلخواه P یالهای کنج n وجهی مفروض را در نقاط A،B،C و... قطع کند، شکل۴ـ۸الف، در هریك از این

نقاط بین دو وجه مجاور از کنج و صفحهٔ P یك کنج سه‌وجهی پدید می‌آید. در هریك از این کنجها ، هرزاویه از مجموع دو زاویهٔ دیگر کوچکتر است. بنابراین:

$$\angle A_1 < \angle A_2 + \angle A_3$$
$$\angle B_1 < \angle B_2 + \angle B_3$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

اگر همهٔ‌نامساویهای مشابه را نوشته و آنها را عضو به عضو با هم جمع کنیم ، خواهیم داشت :

$$\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \cdots < \angle A_2 + \angle B_2 + \cdots + \angle A_3 + \angle B_3 + \cdots$$

اما مجموع زاویه‌های n ضلعی $ABCD\cdots$ مساوی $(2n-4)$ قائمه است . بنابراین :

$$(1) \quad \text{قائمه } (2n-4) < \angle A_2 + \angle B_2 + \cdots + \angle A_3 + \angle B_3 + \cdots$$

مجموع زاویه‌های هریك از مثلثهای جانبی دو قائمه است. پس:

$$(2) \quad \angle(S_1 + S_2 + \cdots) + \angle(A_2 + B_2 + \cdots + A_3 + B_3 + \cdots) = 2n \text{ قائمه}$$

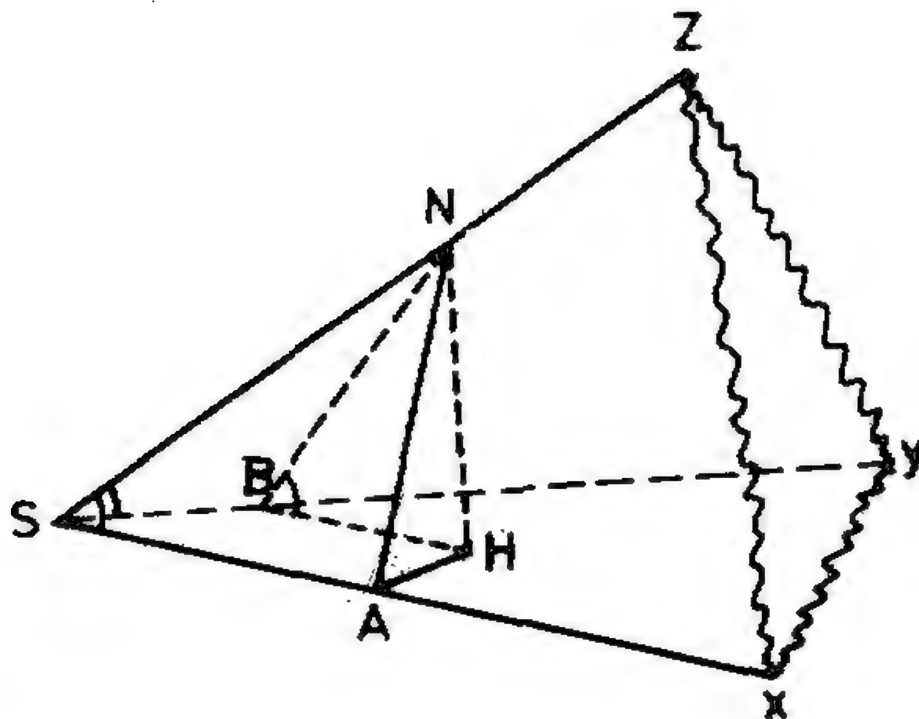
و از ترکیب دو رابطهٔ (۱) و (۲) حاصل می‌شود:

$$\angle S_1 + \angle S_2 + \angle S_3 + \cdots < 360^\circ$$

تمرین

۱ــ چهار نیم‌خط همرسند و اندازه‌های زاویه‌های متوالی‌که بین‌آنها پدید آمده است به ترتیب °۱۷۲ و °۳۵ و °۸۸ و°۶۵ است. اجتماع زاویه‌ها چه شکلی است؟ چرا؟

۲ــ ثابت‌کنید اگر در یك‌کنج سه‌وجهی دو زاویه متساوی باشند، فرجه‌های مقابل به آنها نیز متساویند. از این گزاره در بارهٔ کنجهای سه‌وجهی منتظم چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟ (راهنمائی :از شکل زیر استفاده کنید .)



(شکل ۴ ـ ۸ ب)

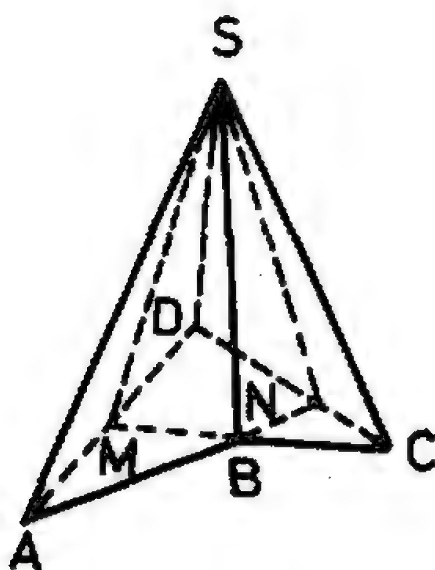
۳- در یك کنج سه وجهی که اندازهٔ هرزاویهٔ آن °۳۰است، هر فرجه را با تعیین یکی از نسبتهای مثلثاتی آن مشخص کنید.

۴- چند کنج منتظم به رأس S می‌توان‌داشت که هر زاویه‌اش °۴۵ یا °۶۰ یا °۷۵ باشد؟

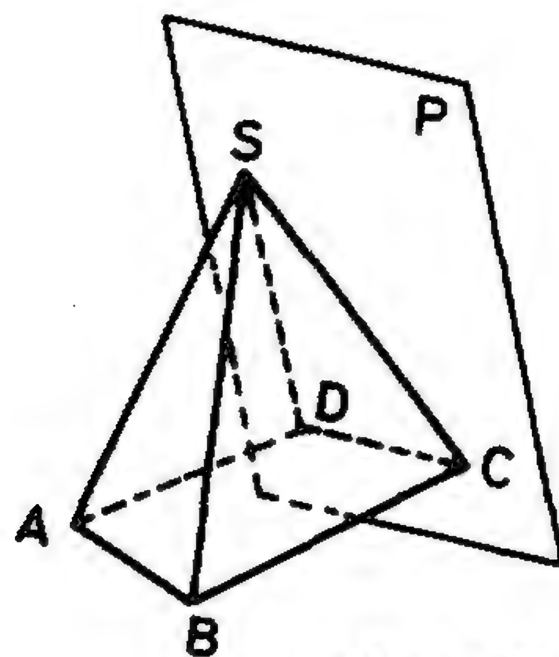
۲.۴- حجمهای هندسی

۱.۲.۴- کلیات - هر زیرمجموعهٔ فضا را که از همه‌طرف به‌صفحه‌ها یا سطحهای دیگر که بعداً تعریف خواهند شد محدود باشد ، حجم گوییم. هرحجم را کـه با مفاهیم شناخته شده در هندسه قابل تعریف کردن باشد، حجم هندسی می‌نامیم. هرحجم هندسی که از همه‌طرف به‌صفحه محدود باشد، چند وجهی نامیده می‌شود. چند وجهی‌ممکن است گوژ یا کاو باشد. چند وجهی را درصورتی گوژ می‌گوییم که صفحه‌ای که بر هر وجه آن می گذرد دیگر وجه‌ها و یالهای‌چند وجهی را قطع نکند، یعنی همهٔ رأسها و وجوه چند وجهی در یك‌طرف صفحهٔ شامل هریك از وجوه آن باشند. این وضع درصورتی خواهد بودکه همهٔ فرجه‌های بین وجه‌های متقاطع چند وجهی کوچکتر از °۱۸۰ باشند، شکل (۴-۹- الف).

چند وجهی‌کاو آن است که اقلاً یك فرجهٔ بزرگتراز °۱۸۰ داشته‌باشد، به بیان دیگردرآن وجه‌هایی وجود داشته باشندکه صفحهٔ‌گذرنده برآنها دیگروجوه و یالهای چند وجهی را قطع کند شکل (۴-۹-ب).



(شکل ۴-۹ -ب)
کاو

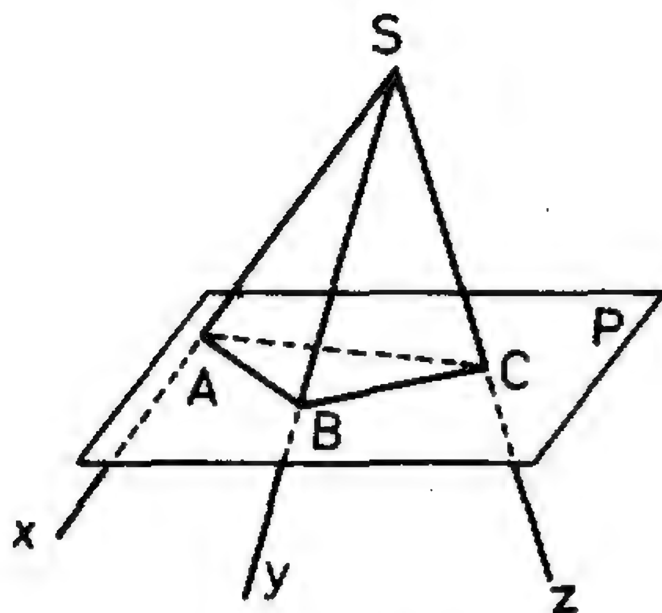


(شکل ۴-۹ - الف)
گوژ

حجمهایی که بـه انواع دیگر سطحها ، یا تـرکیبی از انواع سطحها و صفحه‌ها محدود باشند، هریك برحسب مورد نام معین دارند و در این بخش به موقع‌پاره‌ای ازآنها را خواهید شناخت .

اگـر صفحه‌ای یالهای یك کنج سه وجهی را در سه نقطهٔ غیر رأس آن قطع کند ، زیر-

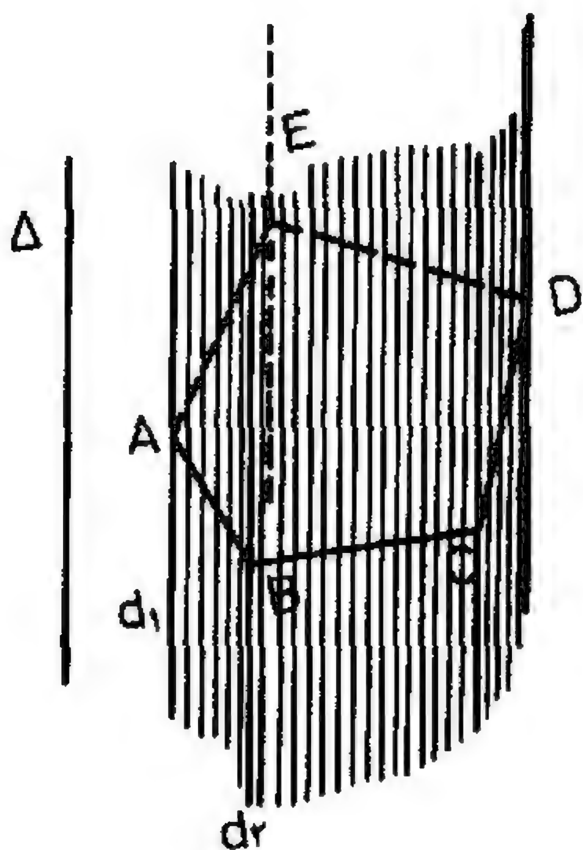
مجموعه‌ای از فضا، محدود به وجوه کنج و صفحهٔ مفروض، مشخص می‌کند که آن را چهار وجهی می‌نامیم، شکل (۴ــ۹ــج).



(شکل ۴-۹ ــ ج)

چهار وجهی ساده‌ترین چند وجهیها است زیرا با کمتر از چهار صفحه اصولاً حجمی محدود نمی‌شود و از برخورد سه صفحه دو به دو فقط کنج سه وجهی پدید می‌آید کــه فضا را به دو زیر مجموعه، هردو بیکران تفکیك می‌کند.

۲.۲.۴ـ سطح منشوری ـ چند ضلعی



(شکل ۴-۱۰)

مسطح ...ABCDE وامتداد Δ را که باصفحهٔ آن موازی نیست در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ خطهای موازی Δ که هر یك برنقطه‌ای از چند ضلعی می‌گذرد، سطحی پدید می‌آورد که آن را سطح منشوری می‌گوییم، شکل ۴ــ۱۰، یعنی:

سطح منشوری عبارت از مجموعهٔ خطهایی است که هر یك بر نقطه‌ای از یك چند ضلعی بگذرد و با امتدادی که با صفحه چند ضلعی موازی نیست، موازی باشد.

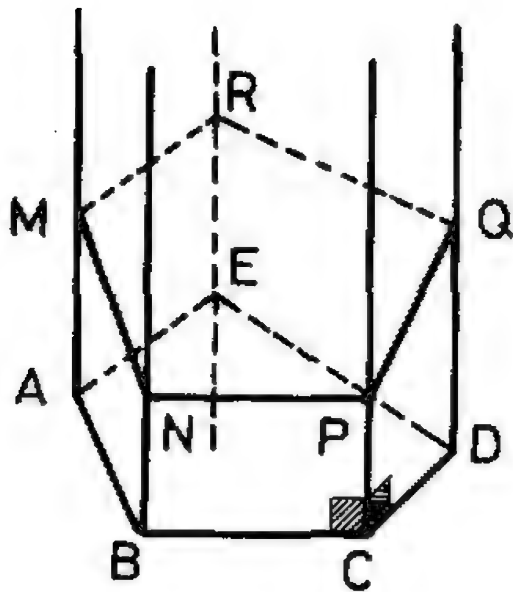
درهرسطح منشوری چند ضلعی مانند ...ABCDE را چند ضلعی هادی و هر خط از مجموعهٔ خطهای موازی Δ را یك مولد سطح منشوری می‌گوییم.

درسطح منشوری مجموعهٔ مولدهایی که برنقاط یك ضلع از چند ضلعی هادی می‌گذرند دریك صفحه واقعند، هر یك از این صفحه‌ها را یك وجه سطح منشوری می‌نامیم. مولدهایـــی که از رأسهای چند ضلعی هادی می‌گذرند یالهای سطح منشوری نامیده می‌شوند. هر یال از سطح منشوری فصل مشترك دووجه مجاور آن است. مانند مولدهای d_1 و d_2 و ... در شکل (۴ــ۱۰).

هرصفحه که با مولدهای سطح منشوری موازی نباشد، سطح منشوری را دریك چندضلعی قطع می‌کند. این گونه چند ضلعیها را مقطع سطح منشوری باصفحه می‌گوییم. مانندچندضلعی MNPQR درشکل ۴ــ۱۱.

اگر صفحهٔ قاطع برامتداد مولدهای سطح منشوری عمود باشد، چند ضلعی را مقطع قائم سطح منشوری و درغیر این صورت مقطع مایل می گوییم.

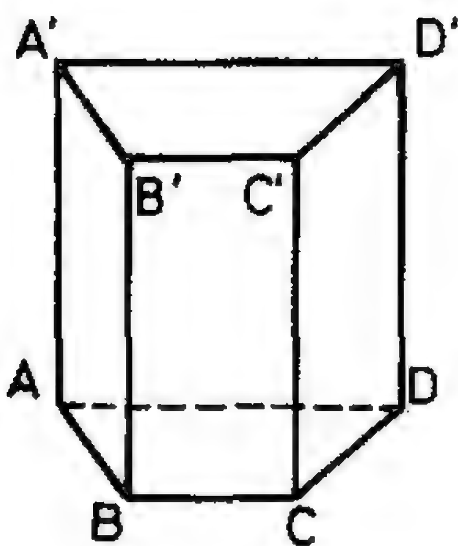
چند ضلعی هادی خود مقطع سطح منشوری با یك صفحه است. تعداد اضلاع هر مقطع غیر موازی با مولدهـا در سطح منشوری، با تعداد وجوه آن یکی است.



(شکل ۴-۱۱)

هرصفحهٔ موازی مولدها سطح منشوری را درطول یك یاچند مولد قطع می کند. برحسب آن که چند ضلعی هادی گوژ یا کاو باشد، صفحهٔ موازی مولدها آن را در دو مولد یا در چند مولد قطع می کند.

۴.۲.۳ـ منشورـ منشور حجمی است که به‌یك‌سطح منشوری ودومقطع موازی محدود باشد (شکل ۴-۱۲).



(شکل ۴-۱۲)

در هر منشور هر یك از دومقطع را قاعده و هریك از چند ضلعیهایی را که جزئی از وجوه سطح منشوری و بین دو قاعده‌محصورند یك‌وجه‌جانبی می گوییم.

درمنشور دوقاعده متساویند (چرا؟).

اگر دو قاعدهٔ منشور، مقطع‌های قائـم سطح منشوری باشند، یعنی درحالتی که مولدها برصفحهٔ هر دوقاعدهٔ منشور، عمود باشند منشور را منشور قائم ودرغیراین صورت منشور مایل می گوییم.

وجه‌های جانبی هرمنشور متوازی‌الاضلاع هستند.

درمنشور قائم وجه‌های جانبی مستطیل یا مربع هستند.

پاره‌خطی راکه عمود برصفحه‌های دو قاعده و به‌آن دوصفحه محدود باشد، ارتفاع منشور می گوییم. اندازهٔ ارتفاع منشور مساوی فاصلهٔ صفحه‌های دو قاعده است. درمنشورقائم ارتفاع با مولدها مساوی است. یعنی: در منشورقائم هریال ارتفاع منشور نیزهست.

منشور منتظمـ منشورمنتظم منشورقائمی است که قاعدهٔ آن یك چند ضلعی منتظم باشد.

تمرین

۱ـ آیا کنج وسطح منشوری را حجم هندسی می‌توان درنظر گرفت؟ چرا؟

۲ـ ساده‌ترین سطح منشوری کدام است؟ چرا؟ ساده‌ترین منشورها چند وجه دارد؟

۳ـ فرق منشور را با سطح منشوری آن بیان کنید. فرق منشورقائم و منشور مایل را بیان کنید.

۴ـ چرا درسطح منشوری امتداد مولدها نباید باصفحهٔ چندضلعی هادی موازی باشد؟

۵ـ یالهای سطح منشوری کدام مولدهای آن هستند؟

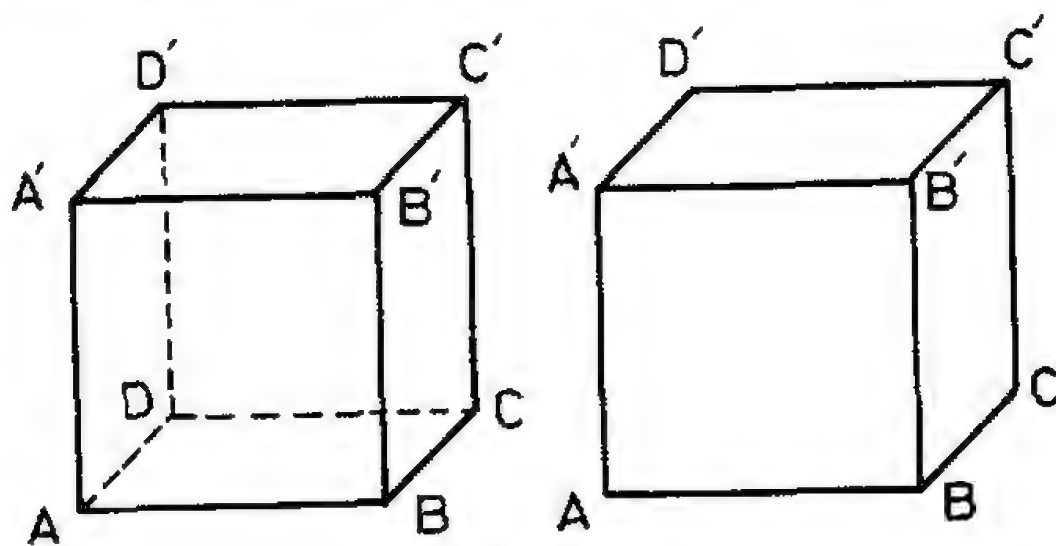
۶ـ صفحه‌ای که با مولدهای سطح منشوری موازی باشد درچه صورت آن سطح را قطع می‌کند. مقطع آن باسطح منشوری چه شکلی است؟ (درسطح‌منشوری گوژ و کاو).

۷ـ ثابت کنید مقطعهای دوصفحهٔ موازی باسطح منشوری دوچند ضلعی متساویند.

۴.۲.۴ـ مکعب

تعریفـ مکعب منشوری است که قاعده‌ها و وجوه جانبی آن مربع باشند. از این تعریف نتیجه می‌شود که: مکعب منشور قائم است. مکعب دارای شش وجه، دوازده یال و هشت رأس است (شکل ۴ـ۱۳).

هریال مکعب بروجه‌هایی که با آن موازی نیستند عمود است. فرجه‌های بین وجه‌های مجاورمکعب قائمه‌اند. کنجهای بین وجه‌هایی که بر هررأس مکعب می گذرند سه قائمه‌اند؛



(شکل ۴ـ۱۳)

وجه‌های روبه‌روی مکعب متوازیند. همهٔ یالهای مکعب متساویند. هرمکعب با یك‌عامل که همان اندازهٔ یالهای آن است، مشخص می‌شود،

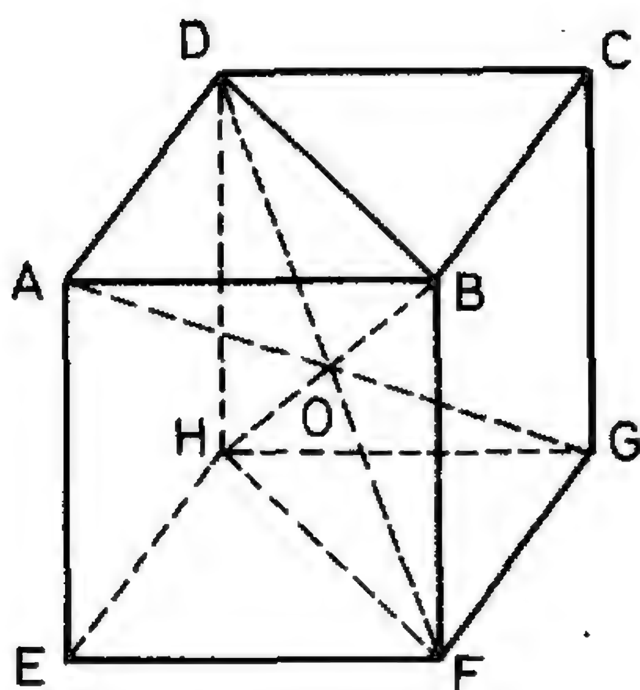
۵.۲.۴ـ مساحت جانبی و مساحت کل مکعبـ مساحت جانبی هـر منشور برابر با مجموع

مساحتهای صفحه‌هایی است که ازجوانب‌آن حجم را محصور ساخته‌اند. مثلاً در مکعب اگر دو وجه‌قابل در وضع افقی قرار گرفته باشند. مساحت جانبی عبارت از مجموع‌مساحتهای چهار مربعی است که صفحه‌های آنها قائمند ومکعب ازاطراف به آنها محدود است. اگر مساحت جانبی مکعبی به‌ضلع a را با s نمایش دهیم، روشن است که :

$$s = ۴a^۲$$

۶.۲.۴- مساحت‌کل مکعب- مساحت کل هرچند وجهی مجموع مساحتهای همهٔ وجوهی است که‌آن حجم را محصور ساخته‌اند. وجوهی که مکعب را محصور می‌سازند همه مربعهای‌مساوی وتعدادآنها ۶ است. پس اگرمساحت‌کل مکعبی راکه اندازهٔ هر یال آن a است با S نمایش دهیم :

$$S = ۶a^۲$$



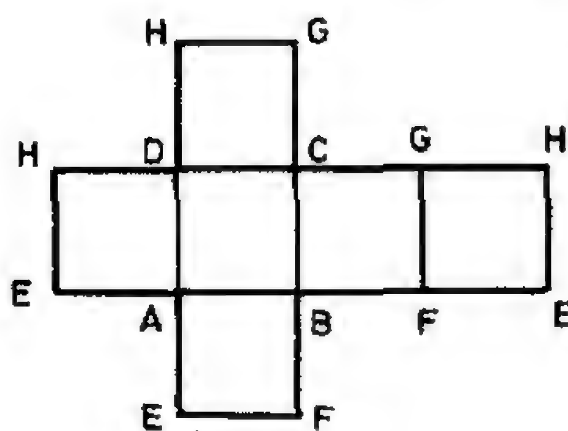
(شکل ۴-۱۴)

۷.۲.۴- قطرمکعب - در هرمکعب پاره‌خطی که ابتدا وانتهای‌آن دورأس غیرواقع بریك وجه باشند، قطر نامیده می‌شود.

هرپاره خط که دورأس مقابل یك وجه را بههم می‌پیوندد، قطری ازآن وجه است. درشکل (۴-۱۴) پاره خطهای DF و HB قطرهای مکعب و پاره خطهای BD و HF قطرهایی ازوجوه مکعبند.

بااستفاده ازقضیهٔ فیثاغورس ثابت می‌شود که در مکعبی که اندازهٔ هر یال آن مساوی a باشد، اندازهٔ هرقطر ازهروجه $a\sqrt{۲}$ واندازهٔ هرقطر ازمکعب $a\sqrt{۳}$ است، (چرا؟).

۸.۲.۴- گسترش سطح مکعب برصفحه- اگر سطح کل مکعبی را درامتداد یالهای جانبی وسه یال ازهر قاعده بریده ووجه‌های جانبی ویك قاعده را برصفحهٔ قاعدهٔ دیگر بازکنیم، شکل (۴-۱۵) حاصل می‌شود. ازاین گسترش بـرای ساختن مکعبی به ضلـع معین می‌توان استفاده‌کرد.



(شکل ۴-۱۵)

تمرین

۱ــ تحقیق کنید هرمکعب چند رأس، چند یال، چند وجه، چند قطر دارد؟ چرا؟

۲ــ ویژگیهای یك مکعب را بنویسید وآنها را ثابت کنید.

۳ــ مساحت جانبی ومساحت کل مکعبی به‌ضلع ۹ سانتیمتررا حساب کنید.

۴ــ ثابت کنید قطرهای مکعب همرسند.

۵ــ اندازهٔ قطر هروجه و هرقطر ازمکعبی به‌ضلع ۱۲ سانتیمتررا حساب کنید.

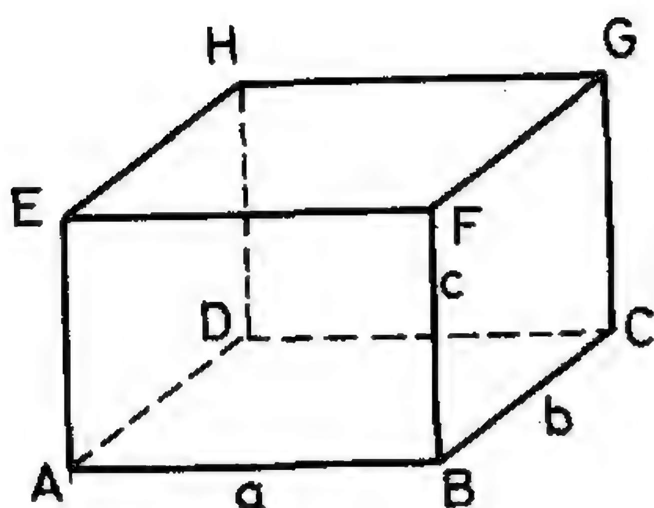
۹.۲.۴ــ مکعب مستطیل

تعریفــ مکعب مستطیل منشور قائمی است که قاعده‌های‌آن مربع یامستطیل باشند (شکل۴ــ۱۶).

وجه‌های‌جانبی‌مکعب‌مستطیل، مربع یامستطیلند.

مکعب نوع ویژه‌ای ازمکعب مستطیل است‌که قاعده‌ها و وجوه جانبی آن مربعهای متساویند، به بیان دیگر:

مکعب، مکعب مستطیلی است‌که قاعده‌های آن مربعند وارتفاع‌آن مساوی ضلع قاعده است.



(شکل ۴ــ۱۶)

درهرمکعب مستطیل، کنجها سه قائمه‌اند، هر یال بر دو وجه مقابل عمود است. وجه‌های مقابل متوازی ومتساویند، فرجه‌های بین هر دو وجه مجاور قائمه‌اند.

هرمکعب مستطیل با اندازه‌های‌سه یال‌گذرنده ازهررأسش‌مشخص‌می‌شود. اگرسه‌یال‌مجاور مکعب مستطیل بــه اندازه‌های c,b,a باشند،

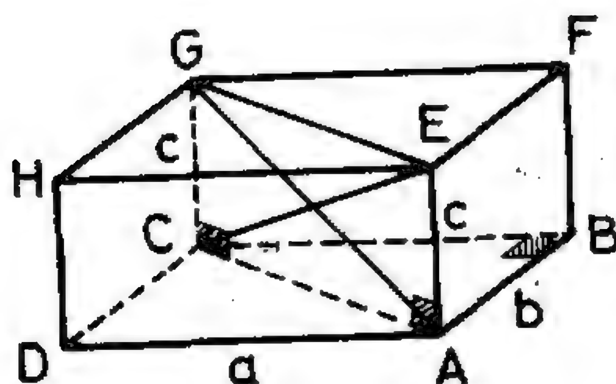
(شکل ۴ــ۱۷) ، در وجه $ABCD$:

$$AC=\sqrt{a^2+b^2}$$

وچون $CG \perp AC$ است در مثلث‌قائم‌الزاویهٔ ACG :

$$AG^2=AC^2+CG^2=a^2+b^2+c^2$$

در نتیجه :



(شکل ۴ــ۱۷)

$$AG=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

یعنی : اندازه قطرمکعب مستطیل مساوی است با جذر مجموع مربعهای سه یال مجاور آن.

اگر در مکعب مستطیلی $a=b$ یعنی قاعده‌ها مربع باشند، مکعب مستطیل با دو بعد a و c مشخص می‌شود و در این‌صورت قطر AC از قاعده $a\sqrt{2}$ است و قطر مکعب مستطیل

$$AG=\sqrt{2a^2+c^2}$$

از آنچه ذکر شد می‌توان نتیجه گرفت که در مکعب مستطیل قطرها مساوی یکدیگرند. این حکم را بدون محاسبهٔ قطرها نیز می‌توان ثابت کرد.

مساحت جانبی مکعب مستطیل- مساحت جانبی مکعب مستطیلی که اضلاع قاعدهٔ آن b,a و ارتفاعش c باشد، از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$s=2(a+b)c \qquad (5-4)$$

مساحت کل مکعب مستطیل - در مکعب مستطیل بـه ابعاد c,b,a مساحت کل وجوه از دستور زیر به‌دست می‌آید:

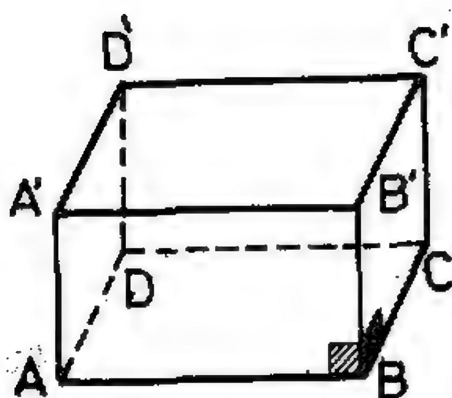
$$S=2(ab+bc+ca) \qquad (6-4)$$

۱۰.۲.۴- متوازی‌السطوح

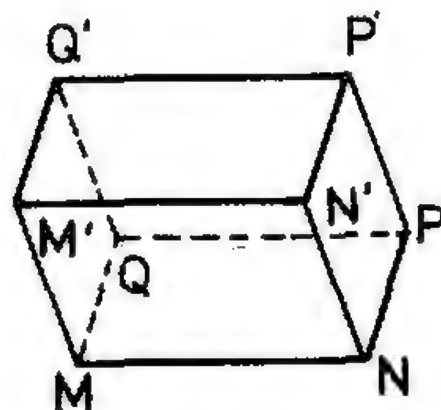
تعریف- متوازی‌السطوح منشوری است که قاعده‌های آن متوازی‌الاضلاعند.

هرگاه در متوازی‌السطوح یالها برصفحهٔ قاعده عمود باشند، متوازی‌السطوح قائم است و اگر یالها نسبت به صفحهٔ قاعده مایل باشند متوازی‌السطوح مایل است (شکل ۴-۱۸).

در متوازی‌السطوح دو یا چهار یا هرشش وجه ممکن است مستطیل یا مربع باشند. از این روی مکعب مستطیل و مکعب انواع ویژهٔ متوازی‌السطوح هستند.



متوازی‌السطوح قائم



متوازی‌السطوح مایل

(شکل ۴-۱۸)

در متوازی‌السطوح قائم یالها با ارتفاع مساوی هستند.

در متوازی‌السطوح وجه‌ها دوبدو متوازی و متساویند (چرا؟) .

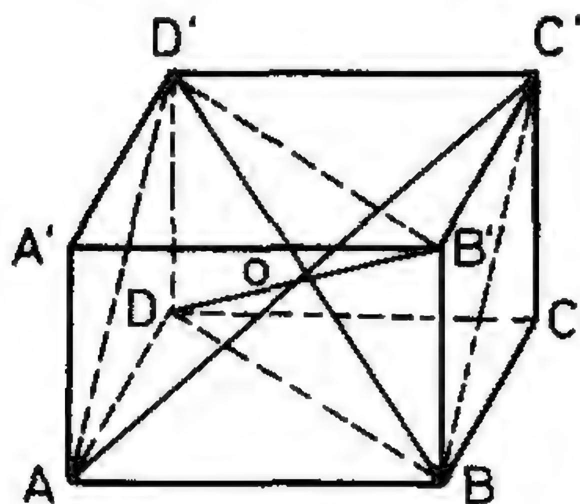
متوازی‌السطوح ۱۲ یال داردکه چهار به چهار متوازی و متساویند.

در متوازی‌السطوح زاویه‌های هرکنج ، همچنین فـرجه‌ها ممکـن است حاده ، قائمه ، یا منفرجه باشند.

قضیه - در متوازی السطوح قطرها منصف یکدیگرند.

برهان- در متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ (شکل۴-۱۹) ، صفحهٔ قطری را که بریالهای مقابل DD' و BB' می‌گذرد درنظـر می‌گیریم. این صفحه شامل دو قطر $D'B$ و DB' از متوازی‌السطوح است . وجوه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ موازیند و صفحهٔ قطـری $DD'BB'$ آن دو وجه موازی را در دو خط $D'B'$ و DB قطع کـرده است ، بنابـراین $BD \| B'D'$. از طرفی $DD' \| BB'$ ، پس چهارضلعی $DD'B'B$ متوازی‌الاضلاع است و قطرهای‌آن یکدیگر را نصف می‌کنند ، یعنی هرقطر از نقطهٔ O ، وسط قطردیگر می‌گذرد.

حال صفحهٔ قطری راکه بـر دو یال AB و $C'D'$ می‌گذرد درنظر می‌گیریم . به دلیلی مشابه‌آنچه ذکرشدثابت می‌شودکه چهارضلعی $ABC'D'$ متوازی‌الاضلاع است . بنابراین قطرهای‌آن منصف یکدیگرند، یعنی‌قطر AC' از نقطهٔ O وسط BD' می‌گذرد. دیگرقطرها نیز به‌همین دلیل در نقطهٔ O نصف می‌شوند . یعنی‌قطرهای متوازی‌السطوح همرسندویکدیگر را نصف می‌کنند.



(شکل ۴-۱۹)

۳.۴- مساحت جانبی و مساحت کل‌منشور

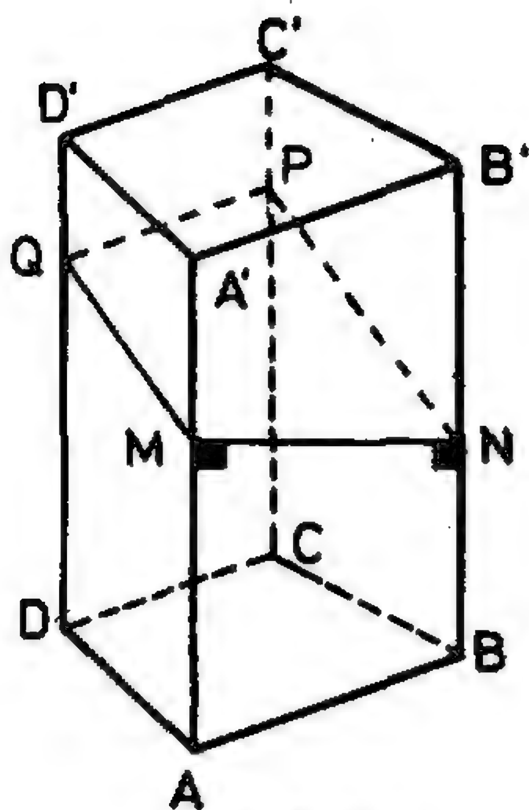
مساحت جانبی هر منشور مجموع مساحتهای وجوه جانبی آن است. بـرای تعیین مساحت جانبی منشور ، درحالت‌کلی باید مساحتهای هریك از وجوه جانبی‌را تعیین‌کرده ومجموع‌آنها را حساب‌کنیم.

مساحت‌کل منشور برابر با مجموع مساحت جانبی ومساحتهای دو قاعده آن می‌باشد.

مساحت جانبی منشور را با استفاده از قضیهٔ زیر نیز می‌توان حساب‌کرد.

قضیه - مساحت جانبی منشور بـرابـر است با حاصلضرب محیط مقطع قائم در اندازهٔ

یال آن.



(شکل ۴-۲۰)

برهان- منشور $ABCDA'B'C'D'$ (شکل ۴-۲۰) و مقطع‌قائم $MNPQ$ ازآن را در نظر می گیریم. پاره‌خط MN بر یالهای AA' و BB' عمود است و بنابراین ارتفاع نظیر قاعده‌های AA' و BB' ازمتوازی‌الاضلاع $AA'B'B$ است و آنها رامعمولا ارتفاعهای وجوه‌جانبی می گویند. اگر مساحت این‌متوازی‌الاضلاع را s_1 بنامیم $s_1=MN\cdot AA'$

با توجه بـه آن‌که یالهای منشور متساویند، مساحتهای متوازی‌الاضلاعهای جانبی به‌ترتیب به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$s_2=MQ\cdot AA'$

$s_3=QP\cdot AA'$

. . . .

و چون این تساویها را عضو به‌عضو باهم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$s_1+s_2+s_3+\cdots=(MN+MQ+QP+\cdots)\cdot AA'$$

اگر محیط مقطع قائم منشور را p و مساحت جانبی منشور را s بنامیم:

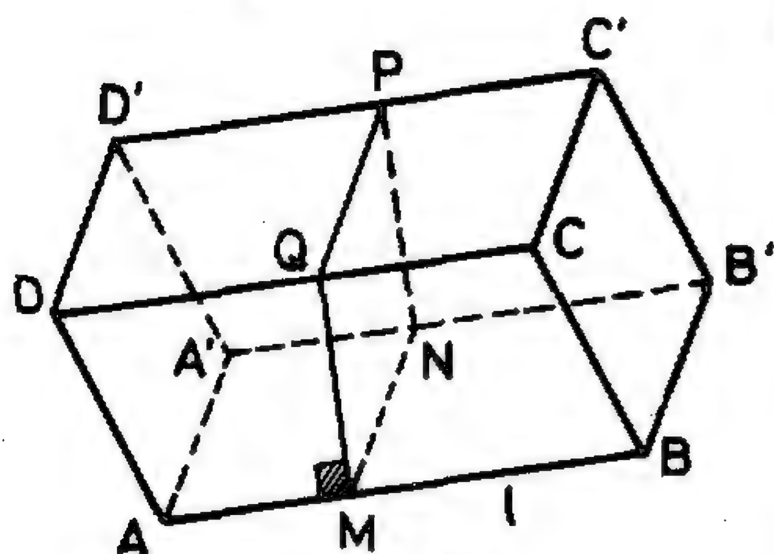
$$s=p\cdot AA'$$

مساحت جانبی متوازی‌السطوح - با توجه بـه آن که متوازی‌السطوح منشوری است که قاعده‌های آن متوازی‌الاضلاعند ، اگر اندازهٔ یکی‌از یالهای متوازی‌السطوح ، مثلاً یال AB درشکل (۴-۲۱) مساوی l و محیط مقطع قائم، عمود بر یالهای موازی AB از آن p باشد، با استفاده از قضیهٔ قبل مساحت جانبی متوازی‌السطوح به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$s=p\cdot l$$

اما محیط مقطع قائم متوازی‌السطوح دو برابرمجموع ارتفاعهای دو وجه جانبی‌ومجاور آن است ، پس اگر h_1 و h_2 ارتفاعهای آن دو وجه باشند، دستور بالا به‌صورت زیرتبدیل می‌شود :

$$s=2l(h_1+h_2)$$



(شکل ۴-۲۱)

۴.۴ـ اندازه‌گیری حجم

۱.۴.۴ـ حجم. یک چند وجهی نیز مانند پاره خط و سطح و زاویه قابل اندازه‌گیری می‌باشد. هرچند وجهی فضا را به سه ناحیه جدا ازهم تجزیه می‌کند: درون، برون وروی چند وجهی. این سه مفهوم را بدیهی‌وار می‌پذیریم. حجم یك چند وجهی اجتماع درون و روی‌آن می‌باشد.

درمورد حجم‌هم‌مانند سطحها، نمی‌توان دوحجم را بکمك انطباق باهم سنجید. می‌پذیریم که حجم هرچند وجهی را می‌توان با شرطهای زیر اندازه‌گیری کرد:

(الف) اندازه حجم هرچند وجهی عددی مثبت است.

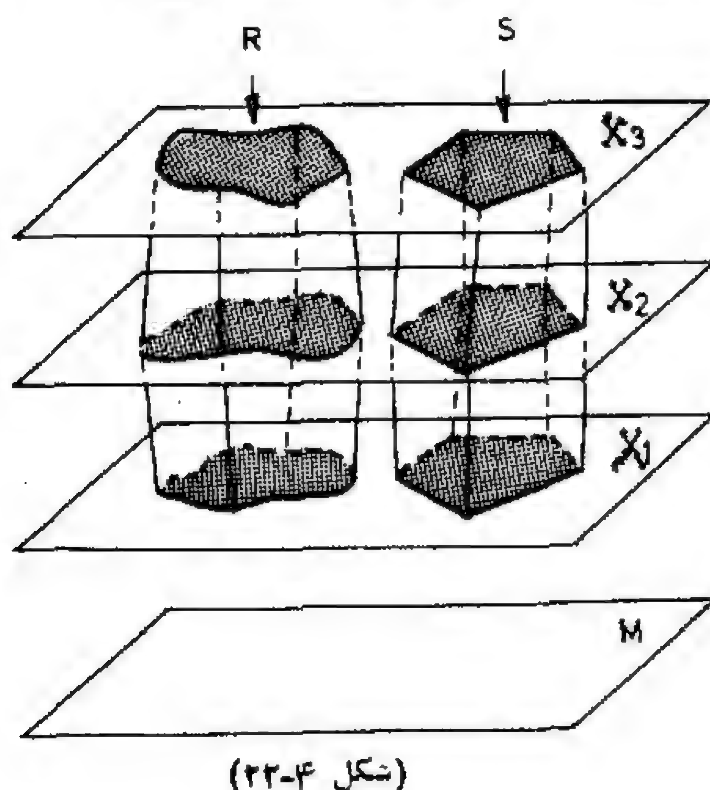
(ب) اندازه حجم هر مکعب مستطیل برابراست با حاصلضرب درازاهای سه یال همرس آن‌که برحسب واحد درازای معینی اندازه‌گیری شده‌اند.

(پ) هرگاه درون یك چند وجهی دردرون یك چند وجهی دیگر قرارگیرد، اندازه حجم اولی ازاندازه حجم دومی بزرگتر نیست.

(ت) هرگاه صفحه‌ای یك چند وجهی را به دو چند وجهی بخش کندآنگاه اندازه‌حجم چند وجهی اصلی‌برابراست با مجموع اندازه‌های حجمهای دوچند وجهی بدست‌آمده.

(ث) اندازه حجم یك چند وجهی با جا به جا شدن‌آن تغییرنمی‌کند.

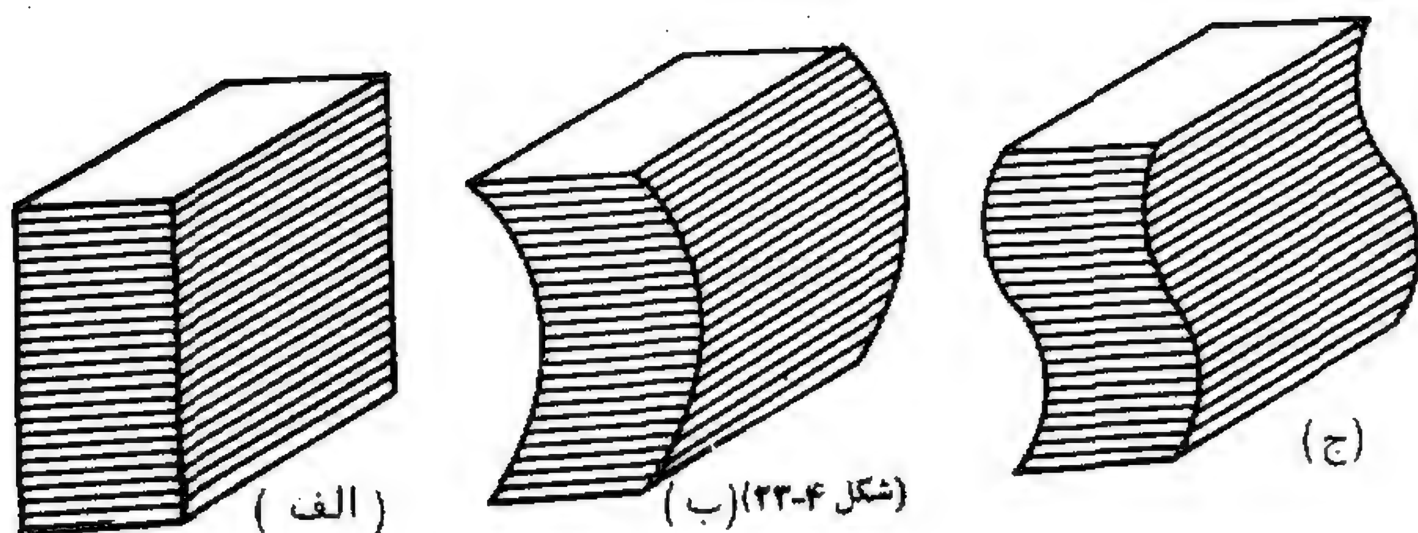
(ج) ـ (اصل کاوالیری[1]) ـ اگر دوحجم $\mathbf{R}$ و $\mathbf{S}$ و صفحه $\mathbf{M}$ چنان باشند که هر صفحه موازی با $\mathbf{M}$ یا هردوحجم را قطع‌کند ویا هیچکدام را، و چنانچه هردورا قطع‌کند مساحتهای مقطعهای بدست‌آمده برابر باشند، آنگاه اندازه حجم $\mathbf{R}$ بااندازه حجم $\mathbf{S}$ برابر است (شکل ۴ـ۲۲).



(شکل ۴-۲۲)

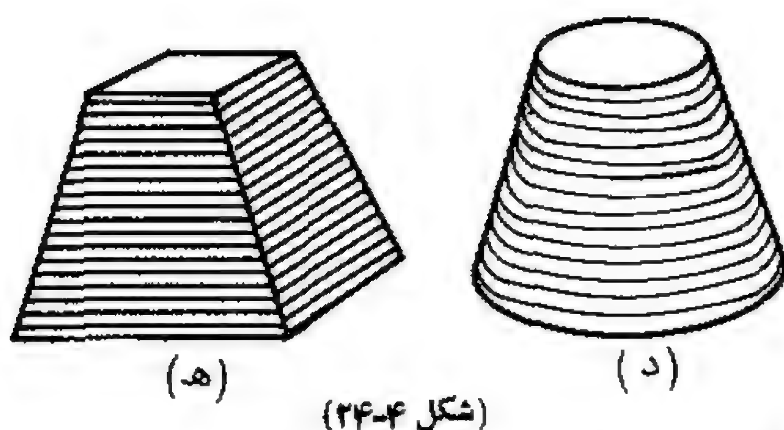
برای درك اصل کاوالیری به‌شکلهای زیر توجه کنید. در شکل (۴ـ۲۳) مقطعهای سه‌جسم (الف) و (ب) و (ج) با هر صفحه افقی مستطیلهایی هم ارز هستند و در نتیجه جسمها حجم مساوی دارند. همچنین در شکل (۴ ـ ۲۴)

1- Cavalier



(شکل ۴-۲۳)

مقطعهای دوجسم (د) و (ه) با هرصفحه افقی یك دایره ویك مربع هم‌ارز هستند و در نتیجه دو جسم حجم مساوی دارند.



(شکل ۴-۲۴)

(قرارداد ــ معمولاً برای اختصار بجای «اندازه حجم» واژه «حجم» را بکارمی بریم.)

۲.۴.۴- حجم مکعب مستطیل- بنا به اصل (ب)، اگر a و b و c اندازه های سه یال همرس مکعب مستطیلی باشند، حجم آن ازدستورزیر بدست می‌آید :

$$V = abc$$

از این دستور نتیجه می‌شود که حجم هرمکعب مستطیل برابر است با حاصلضرب مساحت قاعده درارتفاع.

۳.۴.۴- حجم مکعب - اگریال مکعبی a باشد، آنگاه :

$$V = a^3$$

۴.۴.۴- واحد حجم- مکعبی که درازای هریال‌آن ۱ باشد، واحدحجم نامیده می‌شود. چنانچه واحد درازا متر، سانتی‌متر، فوت، گز یاغیره باشد، واحد حجم را متر مربع، سانتی‌متر مربع، فوت مربع، گزمربع یا غیره می‌نامند.

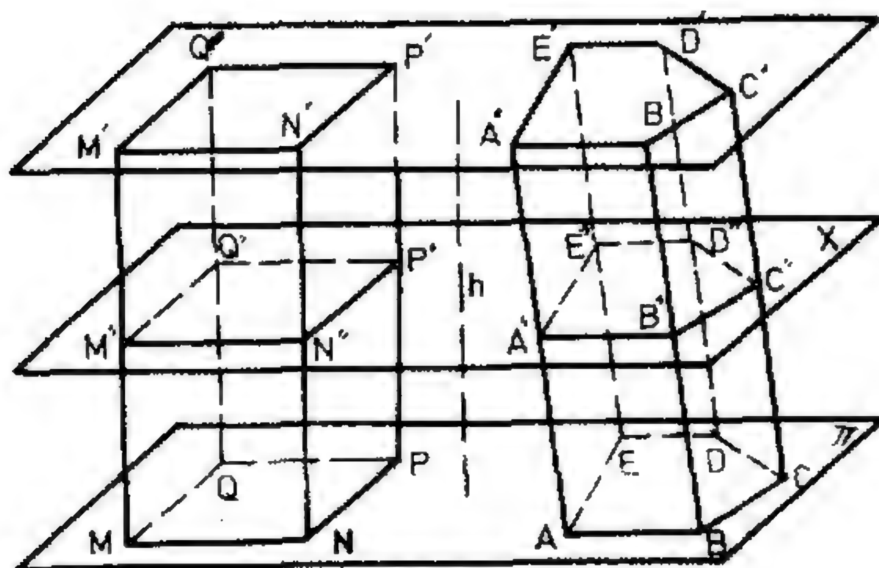
۵.۴.۴ـ حجم منشور

قضیه ـ حجم منشور برابر است با مساحت قاعده ضرب درارتفاع آن.

برهان ـ منشور $ABCDEA'B'C'D'E'$ را درنظر می گیریم و قاعده $ABCDE$ را بریك‌صفحه π قرارمی‌دهیم (شکل۴ـ۲۵). مستطیل $MNPQ$ را درصفحه π چنان‌می‌سازیم که مساحتش بامساحت $ABCDE$ برابر باشد. آنگاه مکعب مستطیل $MNPQM'N'P'Q'$ را طوری بنا می کنیم که قاعده $M'N'P'Q'$ با چند ضلعی $A'B'C'D'E'$ در یك صفحه موازی با π قرارگیرند. بدیهی است‌که هرصفحه دلخواه موازی π یاهم مکعب مستطیل وهم منشوررا قطع می کند ویا هیچکدام را.

اما اگر صفحه X موازی π باشد و آن دو حجم را قطع کند در منشور یك چند ضلعی $A''B''C''D''E''$ ودرمکعب مستطیل یك مستطیل $M''N''P''Q''$ بوجود می‌آورد.

اما چند ضلعیهای $ABCDE$ و $A''B''C''D''E''$ با هم و مستطیلهای $MNPQ$ و $M''N''P''Q''$ نیز باهم برابرند ودرنتیجه مساحت $A''B''C''D''E''$ بامساحت $M''N''P''Q''$ برابر می‌باشد. بنابراین ازاصل کاوالیری نتیجه می‌شود که اندازه حجم منشور بااندازه حجم مکعب مستطیل برابر است. چون حجم مکعب مستطیل برابر با حاصلضرب مساحت قاعده و ارتفاع آن می‌باشد، پس حجم منشور داده شده نیز برابر با حاصلضرب مساحت قاعده‌درارتفاع منشور می‌باشد، زیرا مساحت قاعده منشور با مساحت قاعده مکعب مستطیل و همچنین ارتفاع منشور با ارتفاع مکعب مستطیل برابر می‌باشد.



(شکل ۴ـ۲۵)

تمرین

۱ ـ مساحت جانبی ومساحت‌کل وحجم مکعب مستطیلی راکه قاعدهٔ آن مربعی به‌ضلع ۶

سانتیمتر و بلندی آن ۸ سانتیمتر است تعیین کنید. قطر مکعب مستطیل را حساب کنید.

۲ـ مساحت جانبی و مساحت کل و حجم مکعب مستطیلی را که ابعاد آن ۱۶ و ۱۲ و ۸ سانتیمتر باشد، برحسب دسیمتر مربع و دسیمتر مکعب حساب کنید. اندازهٔ قطر مکعب مستطیل را تعیین کنید.

۳ـ فرق بین مکعب و مکعب مستطیل را بیان کنید.

۴ـ درهر کنج از یك متوازی‌السطوح چند زاویه ممکن است قائمه باشد؟ در کدام حالتها؟

۵ـ فرق اساسی بین متوازی‌السطوح و مکعب مستطیل را بیان کنید.

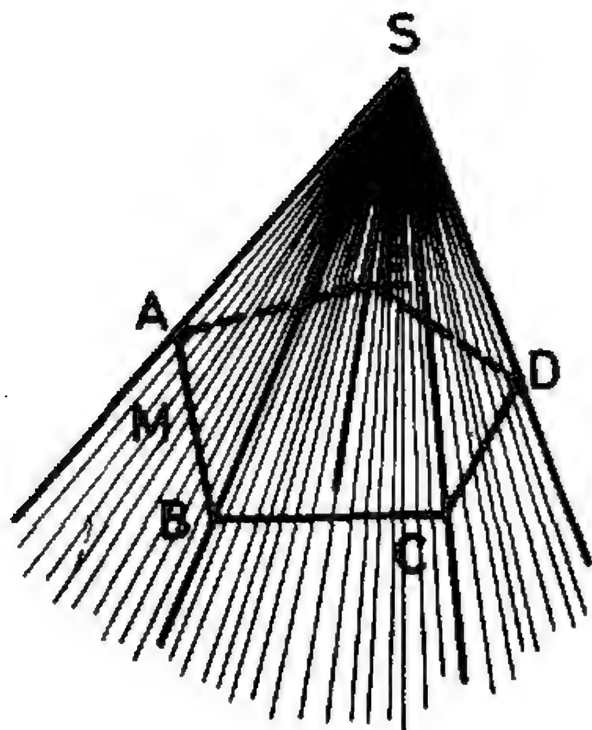
۶ـ دو یال متقاطع از متوازی‌السطوحی ۱۲ و ۸ سانتیمتر و زاویهٔ بین آنها ۶۰ درجه است؛ اگر سومین یال برصفحهٔ آنها عمود و اندازه‌اش ۵ سانتیمتر باشد، مساحت جانبی و مساحت کل و حجم متوازی السطوح را حساب کنید.

۷ـ مساحت جانبی و مساحت کل و حجم منشور منتظمی را که قاعدهٔ آن ۶ ضلعی به ضلع ۴ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۰ سانتیمتر باشد، تعیین کنید.

۸ـ دو مکعب مستطیل یکی به ابعاد a و b و c و دیگری به ابعاد $\frac{3}{2}a$ و $\frac{3}{2}b$ و $\frac{c}{4}$ مفروضند. مطلوب است تعیین نسبت بین قطرهای آنها. درحالت خاص $a=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}$ این نسبت را حساب کنید.

۵.۴ ـ سطح هرمی

۱.۵.۴ ـ تعریف ـ چند ضلعی مسطح $ABCDE\ldots$ و نقطهٔ S را در خارج صفحهٔ آن در نظر می‌گیریم (شکل ۴ـ۲۶). مجموعهٔ نیم‌خطهای SM که هریك از آنها بر نقطهٔ S و یك نقطهٔ M از چند ضلعی می‌گذرد، سطحی پدید می‌آورد که آن را سطح هرمی می‌نامیم.



(شکل ۴-۲۶)

در این سطح چند ضلعی $ABCDE\ldots$ را چندضلعی هادی، نقطهٔ S را رأس و هریك از نیم خطهای مانند SM را یك مولد سطح هرمی می گوییم.

هرصفحه که بررأس S و یك ضلع چندضلعی هادی می‌گذرد یك وجه ازسطح هرمی‌است. فصل مشترك هردو وجه مجاور از سطح هرمی مولدی است که از یك رأس چندضلعی هادی می‌گذرد و آن را یك یال سطح هرمی می‌نامیم. مانند یالهای SA و SB و SC و ... در شکل (۴-۲۶).

هر سطح هرمی به تعداد وجه‌هایش نامیده می‌شود. ساده‌ترین سطح هرمی آن است که چندضلعی هادی‌آن مثلث باشد. سطح هرمی در حقیقت همان است که به عنوان کنج قبلاً شناخته‌ایم.

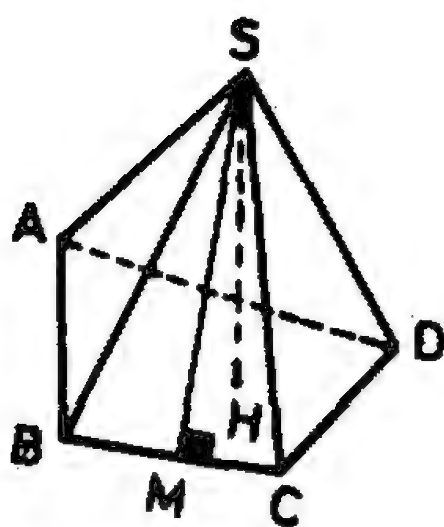
مقطع سطح هرمی با صفحه‌ای که بر رأس‌نگذرد وهمهٔ یالها را قطع کند، چند ضلعی‌است که تعداد اضلاع‌آن با تعداد وجه‌ها یکی‌است. چند ضلعی هادی خود مقطع سطح هرمی با یك صفحه است.

یالها و وجه‌های سطح هرمی‌نامحدودند و سطح هرمی دو زیرمجموعهٔ متمایز نقاط فضا را مشخص می‌کند که معمولاً یکی‌را مجموعهٔ نقاط درونی سطح هرمی و دیگری را مجموعهٔ نقاط برونی‌آن می‌گوییم. مجموعهٔ نقاط واقع بروجوه و یالها، خود سطح را مشخص می‌کند.

۴-۵-۲- هرم

تعریف- هرم حجمی‌است که به یك سطح هرمی وصفحه‌ای که بررأس‌آن نمی‌گذرد وهمه یالهای‌آنرا قطع می‌کند محدود است. قسمتی‌از یال سطح هرمی راکه به رأس وقاعده محدود است یال هرم می‌نامند.

درهرم چندضلعی مقطع را قاعده وقسمتی از سطح هرمی راکه به قاعده و رأس محدود است سطح جانبی می‌نامیم (شکل۴-۲۷).



(شکل ۴-۲۷)

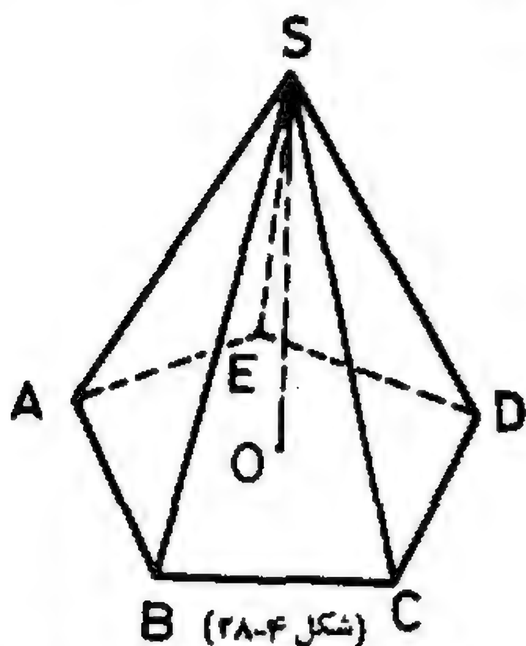
هرمی‌راکه‌قاعدهٔ‌آن‌یك n ضلعی است‌هرم n پهلومی‌خوانیم. هرم n پهلودارای n وجه جانبی، یك قاعده، n یال جانبی، n ضلع قاعده، یك رأس هرم و n رأس قاعده ۲n فرجه و n+۱ کنج است، (چرا؟).

در حالت کلی می‌توان گفت:

هرم حجمی است محدود به صفحه‌های یك چند ضلعی و چند مثلث به ترتیبی که هریك‌از مثلثها در یك ضلع با چندضلعی مزبور و در دو ضلع دیگر با دومثلث مجاور مشترك است.

ارتفاع هرم- پاره‌خطی را که از رأس هرم می‌گذرد و برصفحهٔ قاعده عمود و به رأس و صفحهٔ قاعده محدود است، ارتفاع‌هرم می‌گوییم. مانند ارتفاع SH درشکل (۴-۲۷). هر هرم تنها یك ارتفاع دارد.

سهم‌های هرم- هریك از ارتفاعهای‌وجه‌های‌جانبی هرم ، که از رأس هرم برضلع قاعده عمود شود ، یك سهم هرم نامیده می‌شود. مانند سهم SM درشکل(۴-۲۷) که به وجه جانبی SBCمربوط است. هر هرم‌که دارای n وجه جانبی است n سهم دارد.



(شکل ۴-۲۸)

هرم منتظم - اگر قاعدهٔ هرم چندضلعی منتظم‌باشد و ارتفاع هرم برمرکزقاعده‌بگذرد، هرم را هرم منتظم می‌گوییم، شکل (۴-۲۸).

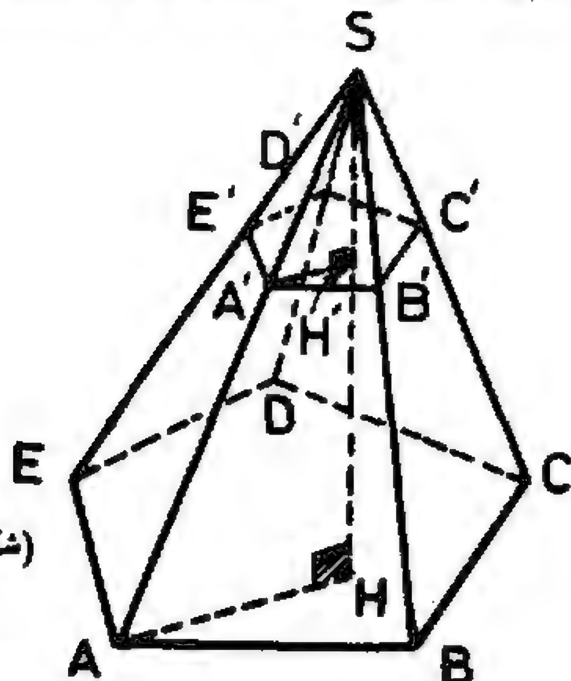
در هرم منتظم‌یالها متساویند .وجوه‌جانبی مثلثهای متساوی‌الساقین (متساوی‌الاضلاع) و مساوی یکدیگرند. کنج رأس یك‌کنج منتظم است. فرجه‌های بین وجه‌های جانبی‌متساویند و فرجه‌هایی‌که بین‌وجه‌های جانبی و صفحهٔ قاعده پدید می‌آیند نیز مساوی یکدیگرند. یالهای هرم منتظم با صفحهٔ قاعده زاویه‌های متساوی‌تشکیل می‌دهند.سهمهای هرم‌منتظم مساوی یکدیگرند.

(گزاره‌های بالا را ثابت‌کنید.)

هرم‌منتظم با تعداد وجه‌ها ویك ضلع‌قاعده و ارتفاع، یا یك ضلع‌قاعده‌ویال ، یایك ضلع قاعده و سهم ، یا یك ضلع قاعده و یك زاویهٔ رأس یا... مشخص می‌شود. یعنی برای مشخص شدن هرم منتظم علاوه بر تعداد وجه‌ها معلوم‌بودن دو عامل مستقل کافی‌است.

۴.۵.۳- ویژگیهای هرم

قضیهٔ ۱- مقطع هرم با هرصفحهٔ موازی با قاعده یك‌چند ضلعی است‌که با قاعده متشابه است .



(شکل ۴-۲۹)

برهان - اگر صفحهٔ P با قاعدهٔ هرم SABCDE موازی و در هرم مقطع A′B′C′D′E′ را ایجادکرده باشد (شکل ۴-۲۹) $A'B' \parallel AB$ و در نتیجه:

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{SB'}{SB}$$

و به همین دلیل:

$$\frac{SB'}{SB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{SC'}{SC}$$

از این تساویها نتیجه می‌شود:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\cdots$$

از طرفی:

$$(A'B' \parallel AB \text{ و } B'C' \parallel BC) \Longrightarrow \angle B'=\angle B$$

یعنی زاویه‌های چند ضلعی‌مقطع و زاویه‌های قاعدهٔ هرم نظیر به نظیر متساوی‌واضلاع‌آنها متناسبند. بنابراین:

$$A'B'C'D'\cdots \sim ABCD\cdots$$

قضیهٔ ۴- مساحت هر مقطع موازی قاعدهٔ هرم و مساحت قاعده با مربع فاصله رأس از آن مقطع و مربع فاصله رأس از قاعده متناسبند.

برهان - در شکل (۴-۲۹) به‌علت توازی صفحهٔ P با قاعدهٔ هرم ارتفاع SH برصفحهٔ P عمود است. اگر ارتفاع صفحهٔ P را در نقطهٔ H' قطع‌کرده باشد، به دلیلی‌که ذکر شد $A'H' \parallel AH$ و بنابراین:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=\frac{SH'}{SH}$$

یعنی نسبت تشابه چندضلعی مقطع و قاعدهٔ هرم مساوی نسبت فاصله‌های رأس هرم از دو صفحهٔ آنها است. از طرفی می‌دانیم‌که در دوشکل متشابه نسبت مساحتها مساوی مربع نسبت تشابه است. پس اگر مساحت مقطع s' و مساحت قاعدهٔ هرم s باشد:

$$\frac{s'}{s}=\frac{A'B'^2}{AB^2}=\frac{SH'^2}{SH^2}$$

تمرین

۱- آیا سطح هرمی یك حجم هندسی است؟ ساده‌ترین هرم چند وجه دارد و وجه‌های آن

چه شکلی دارند؟

۲ـ هرمی که قاعدهٔآن مربع باشد. چند وجه، چند یال، چند فرجه و چندکنج دارد؟

۳ـ آیا هرم منتظمی که اندازهٔ ضلع قاعده و تعداد وجههای آن داده شده باشند مشخص است؟ چرا؟ سه ویژگی ازهرم منتظم را بنویسید.

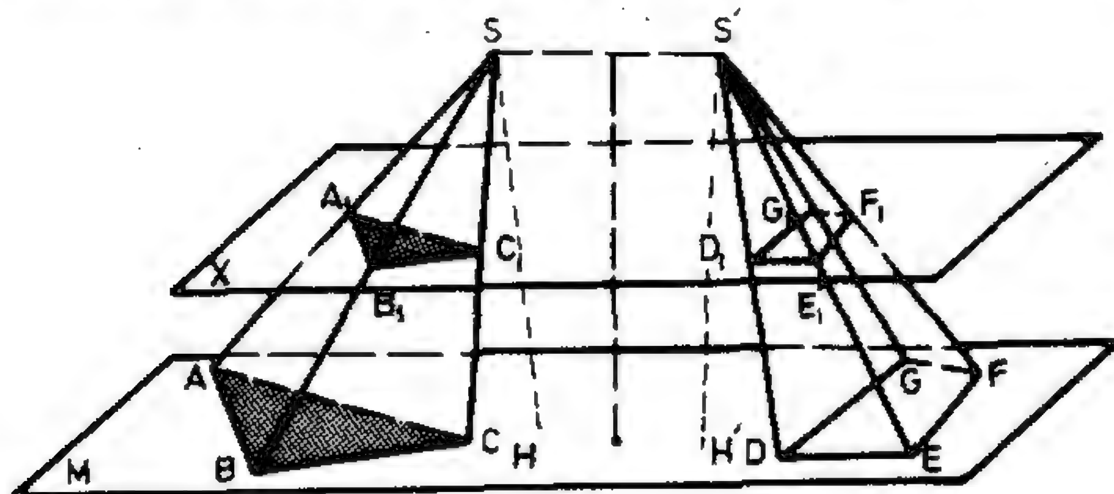
۴ـ ارتفاع یك هرم راکه مساحت قاعدهٔآن s فرض می‌شود به ۴ پاره‌خط متساوی تقسیم کرده وازهرنقطهٔ تقسیم صفحه‌ای موازی صفحهٔ قاعدهٔ هرم می‌گذرانیم. هر یك ازاین صفحه‌ها هرم را دریك مقطع قطع می‌کند. مساحت هریك ازمقطعها را حساب‌کنید.

۵ـ دوهرم که قاعدهٔ یکی مثلث متساوی الاضلاعی به‌ضلع a وقاعدهٔ دیگری مربعی به‌ضلع $\frac{3a}{2}$ است به ترتیبی مجاور یکدیگر قرار گرفته‌اندکه قاعده‌های آنها بریك صفحه و رأسهای آنها دریك طرف‌آن صفحه واقعند. ارتفاع هرم اول h و ارتفاع هرم دوم $\frac{3h}{2}$ است. صفحه‌ای موازی صفحهٔ دوقاعده درنظر می‌گیریم که ازوسط ارتفاع هرم چهاروجهی بگذرد و در دوهرم دومقطع پدیدآورد؛ نسبت مساحتهای مقطعها را تعیین‌کنید.

۴.۵.۴ـ حجم هرمـ برای محاسبه حجم هرم قبلاً قضیه زیررا اثبات می‌کنیم.

قضیه ـ اگر در دو هرم مساحتهای قاعده‌های آنها با هم برابر و ارتفاعهایشان نیز با هم برابر باشند آنگاه اندازه‌های حجمهای آنها باهم برابرند.

برهان ـ دوهرم $SABC$ و $S'DEFG$ را درنظر می‌گیریم چنانکه ارتفاعهای SH و $S'H'$ باهم برابرند و قاعده‌های ABC و $DEFG$ دارای مساحتهای برابر هستند. قاعده‌های هرمها را بریك صفحه M چنان قرار می‌دهیم که رأسهای S و S' دریك طرف M قرارگیرند. اینك صفحه دلخواه X را موازی M رسم می‌کنیم تا یکی ازهرمها را قطع‌کند، چون ارتفاعها برابرند، پس X هرم دیگر را نیز قطع‌کند. مقطع X با دو هرم چند ضلعیهای $A_1B_1C_1$ و $D_1E_1F_1G_1$ را (مطابق شکل ۴ـ۳۰) بدست می‌دهدکه بنا به‌قضیه قبل دارای مساحتهای برابر هستند، پس بنا به‌اصل کاوالیری دوهرم حجمهایشان به یك اندازه می‌باشند.

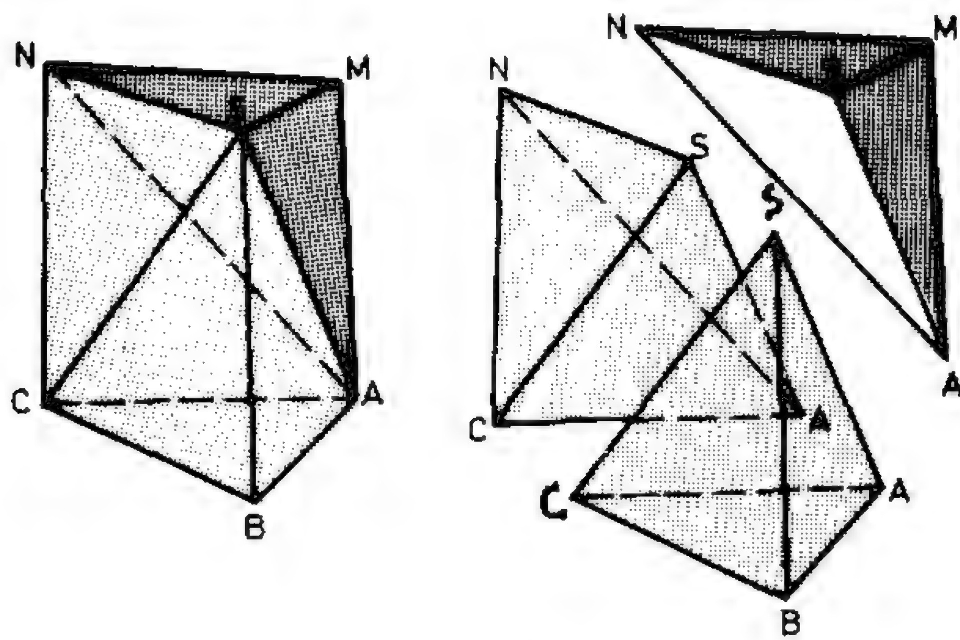


(شکل ۴ـ۳۰)

نتیجه- اگرقاعدهٔ هرم سه پهلویی ثابت باشد و رأس‌آن بر صفحه‌ای موازی قاعده تغییر کند، شکل هرم تغییر می‌کند، ولی اندازه حجم‌آن ثابت می‌ماند.

قضیه- حجم هرم سه پهلوبرابر است باحاصل‌ضرب مساحت قاعده درثلث ارتفاع‌نظیرآن.

برهان - هرم سه پهلوی SABC را درنظر گرفته و منشور ABCMSN را چنان بنا می‌کنیم که قاعدهٔ آن مثلث ABC واندازهٔ هریال جانبی آن مساوی SB باشد، (شکل ۴-۳۱) این منشور از هرم SABC و هرم دیگری به رأس S وقاعدهٔ AMNC مرکب است. اگر پاره خط AN یکی ازاقطار قاعدهٔ هرم چهار پهلو را رسم کنیم، ملاحظه می‌شود



(شکل ۴-۳۱)

که هرم مزبور نیز از دو هرم SAMN و SANC مرکب است‌که حجمهای متساوی دارند زیرا در چهار ضلعی AMNC دو مثلث AMN و ANC متساوی و بنابراین مساحتهای مساوی دارند و ارتفاعهای دو هرم نیز فاصلهٔ رأس S از صفحهٔ AMNC است. اما هرم SAMN را هرمی می‌توان درنظر گرفت‌که قاعدهٔ آن مثلث MSN و ارتفاعش فاصلهٔ رأس A ازصفحهٔ قاعده یعنی همان ارتفاع منشور باشد. پس این هرم با هرم مفروض معادل است، یعنی حجمهای آنها برابرند. بنابر این منشورمزبور از سه هرم که حجمهای متساوی دارند و حجم هریك مساوی حجم‌هرم مفروض است مرکب می‌باشد، یعنی حجم‌هرم مفروض مساوی‌ثلث حجم منشور است. اما قاعدهٔ منشور مثلث ABC وارتفاع‌آن فاصلهٔ رأس S از صفحهٔ قاعده، یعنی ارتفاع هرم است. پس حجم هرم مساوی مساحت قاعده درثلث ارتفاع‌آن‌است. یعنی‌اگر مساحت قاعدهٔ هرم را s واندازهٔ ارتفاع نظیر این قاعده را h بگیریم وحجم هرم V باشد:

$$V = \frac{1}{3} s \cdot h$$

حجم هرم دلخواه - اگر قاعده هرم چند ضلعی باشد هرم سه پهلوئی می‌سازیم که مساحت قاعده‌اش بامساحت چند ضلعی و همچنین ارتفاع هرم سه پهلو با ارتفاع هرم داده شده برابر باشد. آنگاه بنا به دوقضیه پیش:

حجم هرم برابر است با حاصل‌ضرب مساحت قاعده‌آن دریك سوم ارتفاع هرم.

۴-۵-۵- مساحت جانبی ومساحت‌کل هرم - مساحت‌جانبی‌هرم عبارت‌است ازمجموع‌مساحتهای مثلثهای جانبی‌آن.

مساحت‌کل هرم مجموع مساحت جانبی ومساحت قاعدهٔ‌آن است.

مساحت جانبی ومساحت‌کل‌وحجم‌هرم منتظم- اگر قاعدهٔ یك هرم منتظم ، n ضلعی بەضلع a واندازهٔ ارتفاع هرم h باشد، اندازهٔ سهم درچندضلعی قاعده $r=\frac{a}{۲}cotg\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ و شعاع قاعده $R=\frac{a}{۲}\left(sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}\right)$ وبنابراین مساحت قاعده

$$S=\frac{۱}{۲}nar=\frac{۱}{۴}na^{۲}cotg\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

واندازهٔ هریال هرم $l=\sqrt{h^{۲}+R^{۲}}$ و اندازهٔ هر سهم آن $h'=\sqrt{l^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}}$ یا $h'=\sqrt{h^{۲}+r^{۲}}$ است (چرا؟) . یعنی r و R و h' و l را برحسب a و n و h می‌توان حساب کرد. بنابراین اگر s مساحت‌جانبی و S مساحت‌کل و V حجم هرم باشد:

$$s=\frac{۱}{۲}nah'$$

$$S=\frac{۱}{۲}na(r+h')$$

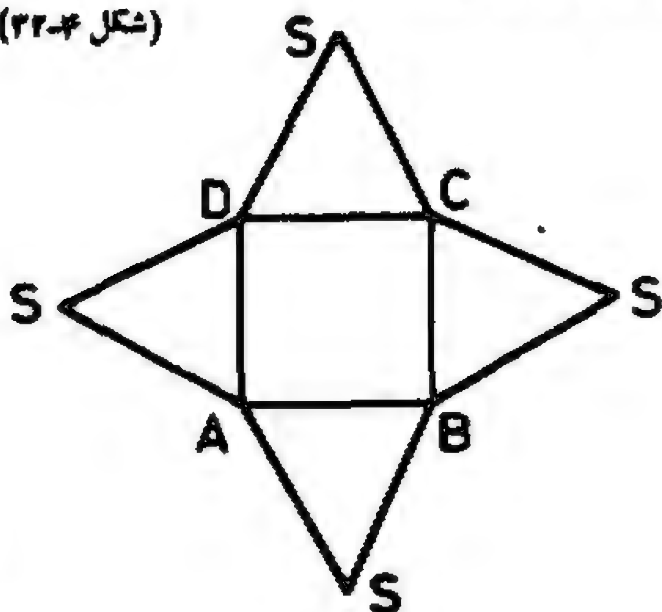
$$V=\frac{۱}{۱۲}na^{۲}h\,cotg\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

با استفاده از آنچه ذکر شد، s و S را برحسب n و a و h حساب‌کنید.

گستردهٔ سطح هرم منتظم بر صفحه -

گستردهٔ سطح هرم منتظم بریك صفحه ازیك چندضلعی منتظم و چند مثلث متساوی‌الساقین متساوی‌که قاعده‌های‌آنها با اضلاع چندضلعی مشترك هستند و ساقهای‌آنها مساوی‌یالهای هرم است تشکیل می‌شود (شکل ۴-۳۲).

(شکل ۴-۳۲)



از این شکل برای ساختن هرم منتظمی که قاعده و وجه‌های جانبی آن داده شده باشند استفاده می‌شود.

تمرین

۱ــ مساحت جانبی، مساحت کل و حجم هرم منتظم سه‌پهلو را که اندازهٔ هریال و اندازهٔ هرضلع قاعدهٔ آن مساوی a باشد، برحسب a تعیین کنید.

۲ــ مساحت جانبی و مساحت کل وحجم هرمی را که قاعدهٔ آن مربعی به‌ضلع $12\sqrt{2}$ و اندازهٔ هریال جانبی آن ۲۵ سانتیمتر است، حساب کنید.

۳ــ ثابت کنید اگر ارتفاع یك منشور سه پهلو با دو برابر قطر دایره محیطی قاعدهٔ آن مساوی باشد، حجم منشور با حجم مکعب مستطیلی که یالهایش مساوی سه‌ضلع قاعدهٔ منشور باشند برابر است.

۴ــ ثابت کنید هرصفحه که بریك یال هرم سه پهلو و بر وسط یال مقابل به‌آن می‌گذرد هرم را به دو جزء که حجمهایشان متساوی است تجزیه می‌کند.

۶.۴ــ هرم ناقص

۱.۶.۴ــ تعریف ـ هرم ناقص جزئی است از یك هرم که بین قاعده ومقطع هرم باصفحه‌ای موازی قاعدهٔ آن محدود باشد (شکل ۴ــ۳۳).

مقطع هرم با صفحهٔ موازی قاعدهٔ آن که بررأس هرم نگذرد، یك چند ضلعی متشابه با قاعده است. پس هرم ناقص را به‌صورت زیر می‌توان تعریف کرد:

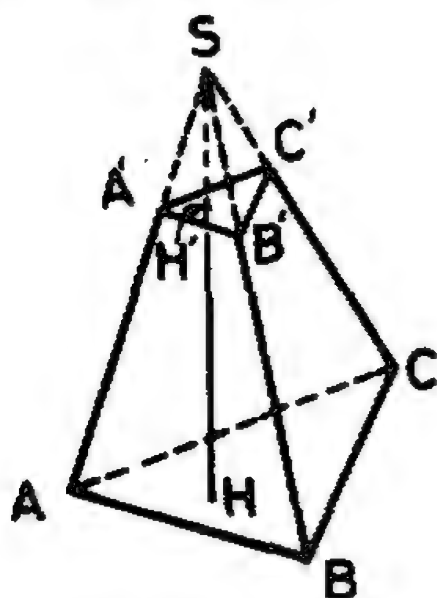
هرم ناقص حجمی است که به دو چندضلعی متشابه واقع در دوصفحهٔ متوازی وچند ذوزنقه محدود باشدچنان که هریك از ذوزنقه‌ها در هرقاعده با یکی از چندضلعیها و درهرساق با ذوزنقهٔ دیگری ازهمان نوع مشترك باشد.

درهرم ناقص هریك ازدوچندضلعی راقاعده و هریك ازذوزنقه‌ها رایك وجه جانبی می‌گوییم.

ساده‌ترین هرم ناقص آن است که قاعده‌های آن مثلث باشند و این هرم ناقص روی‌هم دارای ۵ وجه است.

در هرم ناقص منتظم ذوزنقه‌های جانبی مساوی یکدیگر و متساوی‌الساقین هستند.

پاره‌خط عمود برصفحه‌های دو قاعدهٔ هرم ناقص و محدود به آن دوصفحه را ارتفاع هرم



(شکل ۴ــ۳۳)

ناقص می‌گوییم، مانند ارتفاع HH' در شکل (۴-۳۳). اندازهٔ ارتفاع هرم ناقص مساوی فاصلهٔ صفحه‌های دوقاعده است.

درهرم ناقص منتظم عمودی که ازمرکز هر قاعده برصفحهٔ قاعدهٔ دیگر رسم شود، ازمرکز آن قاعده می‌گذرد.

هرساق از ذوزنقه‌های جانبی‌هرم ناقص را یک یال جانبی و هر ارتفاع از این ذوزنقه‌ها را یک سهم هرم ناقص می‌گوییم.

در هرم ناقص منتظم همهٔ یالها متساوی و همهٔ سهمها مساوی یکدیگرند.

۴.۶.۴- مساحت جانبی و مساحت‌کل و حجم هرم ناقص - مساحت جانبی هرم ناقص‌مجموع مساحتهای وجوه جانبی‌آن است. برای تعیین مساحت جانبی باید مساحتهای ذوزنقه‌های جانبی را حساب کرده و آنها را جمع کنیم.

مساحت‌کل هرم ناقص مجموع مساحت جانبی‌ومساحتهای دو قاعدهٔ آن است.

از دستور زیر بدست می‌آید:

$$V = \frac{1}{3} h \left(S + S' + \sqrt{SS'}\right)$$

یعنی :

حجم هرم ناقص مساوی است با ثلث حاصل‌ضرب ارتفاع در مجموع مساحتهای دو قاعده و واسطهٔ هندسی مساحتهای دو قاعده.

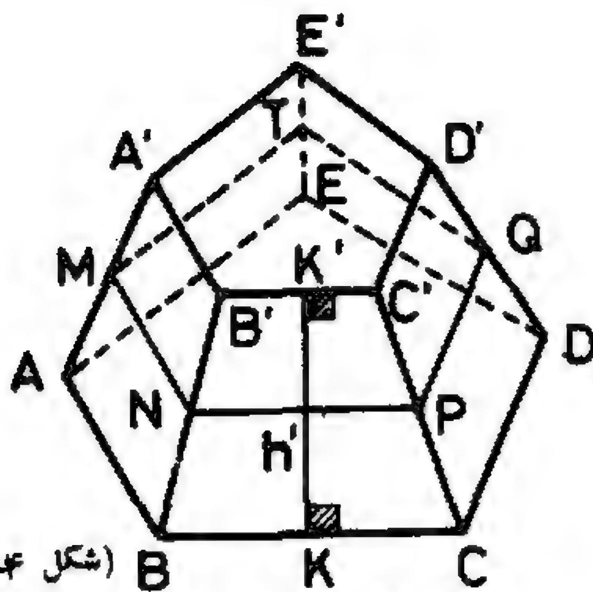
مساحت جانبی هرم ناقص منتظم - چنان‌که قبلاً گفته شد ، مساحت جانبی هرم ناقص مجموع مساحتهای ذوزنقه‌های جانبی‌آن است. اگر هرم ناقص منتظمی مانند شکل (۴-۳۴) داشته باشیم که تعداد وجه‌های‌جانبی‌آن n و اندازهٔ هرضلع از دو قاعدهٔ آن a و a' و اندازهٔ هرسهم‌آن h' باشد، مقدار s مساحت هرذوزنقهٔ جانبی‌آن چنین‌می‌شود:

$$s = \frac{1}{2}(a + a')h'$$

و چون وجوه جانبی هرم ناقص منتظم متساویند (چرا ؟) ، مقدار S مساحت جانبی هرم ناقص منتظم از دستور زیر بدست می‌آید:

$$S = n \cdot s = \frac{n}{2}(a + a')h'$$

حال صفحه‌ای موازی دوقاعده و به یك فاصله از آن دو در نظر می گیریم که وجوه جانبی‌هرم ناقص‌منتظم رادرمقطع MNPQT قطع کند، در هریك از وجوه جانبی‌ضلع‌این مقطع‌نصف مجموع دو قاعده است. یعنی:



(شکل ۴-۳۴)

$$MN=\frac{1}{2}(a+a')$$

(چرا ؟) ، بنابراین : $S=nMN\cdot h'$

و با ملاحظهٔ آن‌که مقطع یك چندضلعی منتظم است (چرا ؟) ، اگــر محیط آن را p بنامیم ، $n\cdot MN=p$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\boxed{S=p\cdot h'}$$

چند ضلعی MNPQT را که صفحهٔ آن بروسط یالهای جانبی هــرم ناقص می گذرد ، مقطع متوسط هرم ناقص می گوییم. از این روی می‌توان گفت:

قضیه - مساحت جانبی‌هرم ناقص منتظم برابر است با حاصل‌ضرب محیط مقطع متوسط آن در اندازه سهم.

تمرین

۱- حجم هــرم ناقص راکه مساحت دوقاعدهٔ آن به ترتیب ۱۶ و ۱۲ سانتیمتر مربع و ارتفاع آن ۱۰ سانتیمتر است حساب کنید.

۲- هرم منتظمی در نظــر بگیرید که قاعدهٔ آن مربعی به‌ضلع ۱۲ سانتیمتر و ارتفاع آن $۸\sqrt{۲}$ سانتیمتر باشد . ایــن هرم را با صفحه‌ای به فاصلهٔ $۳\sqrt{۲}$ سانتیمتر از رأس و موازی قاعده قطع می کنیم. مساحت جانبی و مساحت کل و حجم هرم ناقص حاصل را حساب‌کنید.

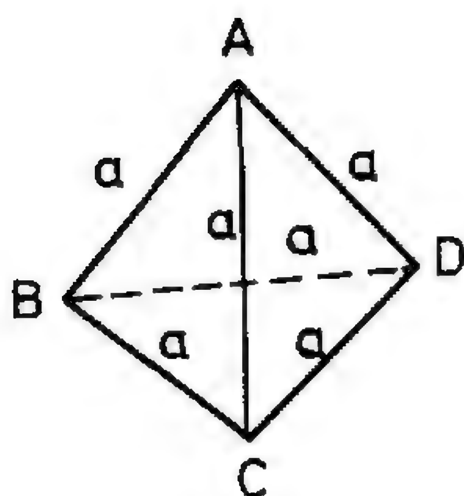
۳- حجم هرم ناقص منتظمی بد ارتفاع $۴\sqrt{۳}$ را که قاعده‌های‌آن ۶ ضلعیهایی به‌اضلاع ۵ و ۲ هستند تعیین‌کنید . تحقیق‌کنید ارتفاع هرم منتظمی‌که این هرم ناقص جزئی از آن است چه اندازه است؟

۷.۴- چند وجهیهای منتظم

۱.۷.۴- تعریف - چند وجهــی منتظم حجمی است محدود بــه تعدادی چندضلعی منتظم متساوی که هریك از آنها در هرضلع با یکی‌از اضلاع چندضلعی دیگری از همین نوع مشترك باشد و فرجه هایی که میان هردو وجه مجاور پدید می‌آیند مساوی یکدیگر باشند.

ساده‌ترین این حجمها چهاروجهی منتظم است که به چهار مثلث متساوی الاضلاع متساوی محدود است. (شکل ۴-۳۵)

مکعب شش وجهی منتظم است ، زیرا حجمی است که به شش مربع متساوی محدود است و وجوه آن دو به‌دو باهم فرجه‌های قائمه ساخته‌اند .



(شکل ۴-۳۵)

ثابت می‌شود که چند وجهیهای منتظم گوژ منحصر به پنج نوعند و برای اثبات این مطلب قبلاً بایدرابطهٔ بین‌تعداد رأسها وتعداد وجه‌ها و تعداد یالهای هرچند وجهی گوژ را بدانیم. رابطه زیر راکه به رابطهٔ اولر[1] معروف است بدون اثبات می‌پذیریم:

اگر تعداد یالهای چند وجهی گوژ را با A و تعداد رأسهای‌آن را با S و تعداد وجه‌های آنرا با F نمایش دهیم.

$$A=S+F-۲$$

۴-۷-۲- انواع چند وجهیهای‌منتظم- بـرای تعیین انـواع و تعداد چند وجهیهای منتظم از ویژگیهای کنجها و چند ضعلیهای منتظم استفاده می کنیم .

در چند وجهیها هیچ دو وجه مجاور یا غیرمجاور در یك‌صفحه واقع نیستند ، پس در هـر رأس بین وجوهی که یالهای‌مشترك دارند یك‌کنج پدید می‌آید. می‌دانیم که مجموع زاویه‌های هرکنج از ۳۶۰° کوچکتر است و هرکنج حداقل سه زاویه دارد ، بنابراین هرزاویه از یك کنج منتظم از ۱۲۰° کوچکتر است . از اینجا نتیجه می‌شود که تشکیل چند وجهـی منتظم با چندضلعیهایی که اندازهٔ هرزاویهٔ آنها ۱۲۰° یا بزرگتراز آن باشد، اصولاً ممکن نیست ، به بیان دیگر هر زاویه از یك چندوجهی منتظم لزوماً کوچکتر از ۱۲۰° است. با ملاحظهٔ آن‌که اندازهٔ هر زاویه n ضلعی منتظم $\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}$ است ، از نامساوی

$$\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}<۱۲۰^\circ$$

می‌توان نتیجه گرفت‌کـه تعداد اضلاع هروجه از چند وجهی منتظم از مجموعهٔ اعداد درست ۳ و ۴ و ۵ خارج نیست .

1_ Euler

اگر $n=3$ یعنی اگر وجه‌های چند وجهی منتظم مثلثهای متساوی‌الاضلاع باشند، اندازهٔ هر زاویه ازکنج 60° است و در این‌حالت تعداد وجه‌های چندوجهی که از هر رأس می گذرند ممکن‌است ۳ یا ۴ یا ۵ باشد (چرا؟). به‌همین دلیل اگر $n=4$ یا $n=5$، یعنی اگروجوه چند وجهی چهارضلعی یا پنج ضلعی منتظم باشند، اندازهٔ هر زاویه از هروجه 90° یا 108° است و تعداد وجه‌هایی‌که از یك رأس چندوجهی می گذرند بیش‌از سه وجه نیست (چرا؟).

حال با توجه به رابطهٔ اولر ملاحظه می‌کنیم که اگر تعداد وجه‌های چند وجهی منتظمی F وهر وجه‌آن دارای n ضلع باشد، تعداد یالها $A=\frac{n\cdot F}{2}$ (چرا؟) و اگر درهمین چندوجهی بر هر رأس m یال بگذرد و تعداد رأسها S باشد، تعداد یالها $A=\frac{m\cdot S}{2}$ (چرا؟) و از مقایسهٔ این دو تساوی $S=\frac{n\cdot F}{m}$ به‌دست می‌آید و اگرمقادیر A و S را بر حسب F، در رابطهٔ اولر قرار داده و تعداد وجه‌های چند وجهی را برحسب m و n از آن تعیین کنیم، خواهیم داشت:

$$F=\frac{4m}{2n+2m-mn}$$

اما چنان‌که دیدیم، n فقط اعداد درست ۳ و ۴ و ۵ را می‌تواند اختیارکند. بنابراین وضع چند وجهی از جهت تعداد وجه‌ها به یکی‌از صورتهای زیر است:

۱ـ اگر $n=3$ باشد، $F=\frac{4m}{6-m}$ است و برای‌آن‌که F عدد درست و مثبت‌باشد، (چرا؟) باید $m<6$ و ازطرفی m حداقل ۳ است (چرا؟) پس تنها سه عدد ۳و۴و۵ به‌جای آن قابل قبولند، اگر $m=3$ باشد، $F=4$ و اگر $m=4$ باشد، $F=8$ و بالاخره اگر $m=5$ باشد، $F=20$ است.

۲ـ اگر $n=4$ باشد، $F=\frac{2m}{4-m}$ و در این تساوی فقط $m=3$ پذیرفتنی‌است و در این‌صورت $F=6$ به‌دست می‌آید.

۳ـ اگر $n=5$ باشد، $F=\frac{4m}{10-3m}$ و در آن تنها $m=3$ پذیرفتنی است و در این‌صورت $F=12$ خواهدبود.

از این استدلال نتیجه می‌شودکه چندوجهیهای منتظم منحصر به پنج نوعند و انواع آنها به‌شرح زیر می‌باشند:

چهار وجهی منتظم با وجه‌های مثلث.

شش‌وجهی منتظم با وجه‌های مربع. (مکعب)

هشت وجهی منتظم با وجه‌های مثلث.

دوازده وجهی منتظم با وجه‌های پنج ضلعی.

بیست‌وجهی‌منتظم با وجه‌های مثلث.

برای ساختن حجمهایی به‌صورت چندوجهی منتظم از شکل هر وجه وتعدادوجه‌ها در هر یك ازحالات پنج گانه می‌توان استفاده کرد.

چند وجهیهای منتظـم را اجسام افلاطونی نامیده‌اند. دلیل ایـن نامگذاری آن است که افلاطون، فیلسوف بزرگ یونانی، در یکی از کتابهای خود چهار وجهی ومکعب و هشت‌وجهی و دوازده وجهـی را به‌چهار عنصر، آتش و باد و خاك و آب قیاس می‌کند و بیست وجهی را تصویری از همهٔ جهان می‌داند.

پرسش

الف ــ برهر رأس از یك هشت وجهی منتظم، چند وجه، چند یال، می گذرد؟

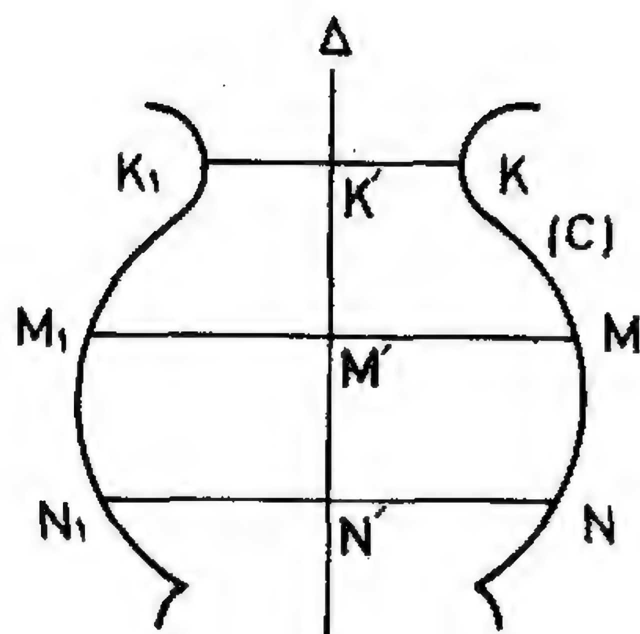
ب ــ بر هر رأس از یك بیست وجهی منتظم، چند وجه، چند یال، می گذرد؟

۸.۴ـ حجمهای دوار

۱.۸.۴ـ کلیات ـ حجمی را که بـه سطحهایی نامستوی، یعنی به‌سطحی غیر ازصفحه، محدود باشد، حجم خمیده گویند. انواع حجمهای خمیده بسیار است. مهمترین آنها حجمهایی‌هستند که به سطح‌های دوار محدود می‌شوند.

۲.۸.۴ـ سطح دوار

تعریف ـ هرگاه خم مسطح C و خط Δ دریك صفحه مانند P واقع باشند و صفحهٔ P گرد خط Δ دوران کند، هرنقطهٔ M از خم C بردایره‌ای جابه‌جا می‌شودکه مرکز آن، نقطهٔ M' تصویر M برخط Δ، و صفحه‌اش عمود بـر Δ، و شعاعش فاصلهٔ نقطهٔ M ازخط Δ است. از دوران‌خم C نیز سطحی پدید می‌آید



(شکل ۴ـ۳۶)

که آن را یك سطح دوار می‌گوییم. اگر دوران صفحهٔ P گرد Δ، °۳۶۰ یا بیشتر باشد، سطح دوار را بسته می‌گویند. بنابراین:

سطح دوار مجموعهٔ نقاطی از فضاست که از دوران یك خم مسطح، گرد خطی واقع در صفحهٔ آن مشخص می‌شود. به بیان دیگر:

سطح دوار از مجموعهٔ اوضاع مختلف یك منحنی ضمن دوران گرد خطی که با آن در یك صفحه است پدید می‌آید (شکل ۴-۳۶).

در هر سطح دوار منحنی C را مولد و خط Δ را محور سطح دوار می‌گوییم. مسیر حرکت هر نقطه از مولد سطح دوار را ضمن دوران آن یك مدار سطح دوار و هر وضع از مولد سطح دوار را یك نصف‌النهار سطح دوار می‌نامیم.

هر نصف‌النهار سطح دوار با محور آن در یك صفحه واقع است، زیرا مولد اصولاً با محور سطح دوار در یك صفحه فرض شد و دوران آن گرد محور، چنان‌که ذکر شد، درحقیقت دوران آن صفحه گرد محور مزبور است.

از هر نقطهٔ سطح دوار یك مدار و یك نصف‌النهار می‌گذرد، نصف النهارهای همهٔ نقاط سطح دوار مساوی یکدیگرند (چرا؟). مدارها لزوماً متساوی نیستند مگر آن که بعضی نقاط مولد از محور دوران به یك فاصله باشند که در این‌صورت مدارهای گذرنده از آن نقاط متساوی هستند.

مدارهای سطح دوار مقطعهای آن سطح با صفحه‌هایی هستند که برمحور سطح دوار عمودند. هر صفحه که محور سطح دوار را شامل باشد، آن سطح را در نصف‌النهارهایی قطع می‌کند که از اجتماع دو وضع مختلف از مولد پدید می‌آیند و این دو وضع مولد نسبت به محور سطح دوار قرینه‌اند. اگر مولد سطح دوار با محور سطح در نقطه‌ای متقاطع باشد، سطح دوار در آن نقطه محور را قطع می‌کند.

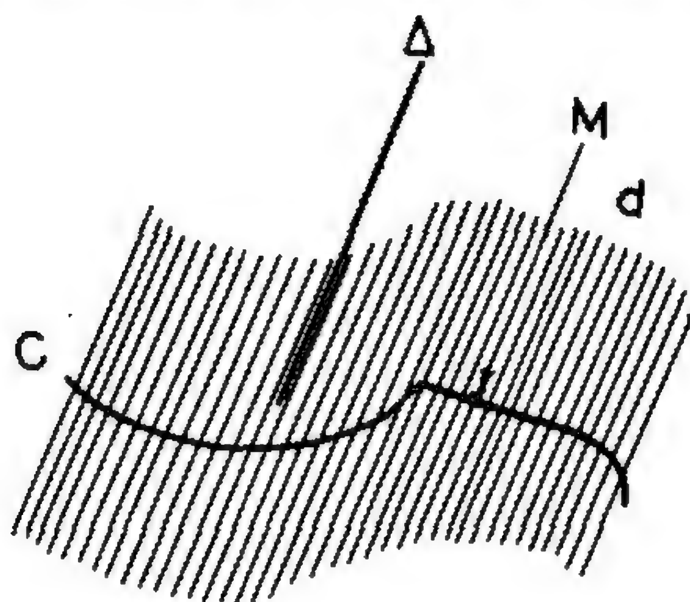
ساده‌ترین سطح دوار از دوران خط راست و دایره گرد خطی که با آنها در یك صفحه واقع باشد، پدید می‌آید. این سطحهای دوار را در این بخش بررسی می‌کنیم.

۴-۸-۳- حجم دوار - حجمی را که به یك سطح دوار و دو صفحه عمود برمحور دوران محدود باشد، حجم دوار می‌گوییم. مهمترین و درعین حال ساده‌ترین حجمهای دوار را ضمن‌شناسایی سطوح دواری که از دوران خط و دایره پدید می‌آیند، مطالعه می‌کنیم.

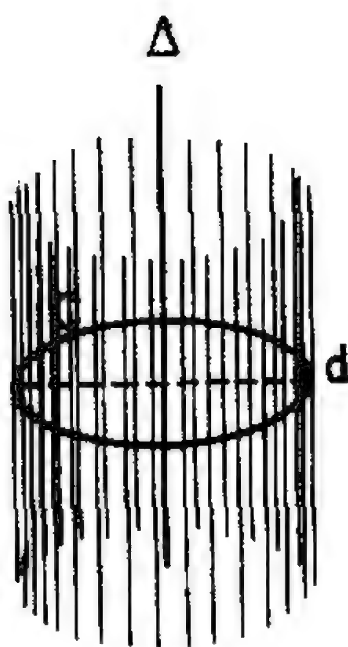
۴-۹- سطح استوانی

۴-۹-۱- تعریف - منحنی C و امتداد مفروض Δ را که با آن در یك صفحه واقع نیست، درنظر

می‌گیریم. از هر نقطهٔ M واقع بر C خطی موازی Δ می‌گذرد، مجموعهٔ خطهای مانند d که ازنقاط منحنی C موازی با Δ مرور می‌کنند، سطحی‌پدید می‌آوردکه آن را سطح استوانی می‌گویند. درهرسطح استوانی‌خط d را مولد و منحنی C را هادی می‌نامند (شکل ۴ـ ۳۷).



(شکل ۴-۳۷)



(شکل ۴ـ۳۸)

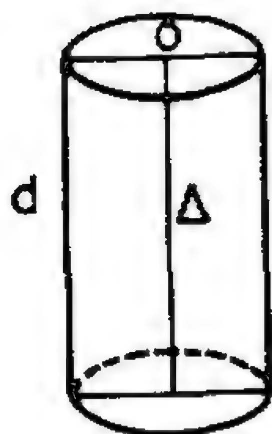
۲.۹.۴ـ سطح دوار استوانه‌ای- سطح دوار استوانه‌ای‌آن‌است‌که از دوران‌یك خط راست گـرد خطـی موازی آن پدید می‌آید . مانند سطح دوار با محور Δ و مولـد $\Delta \parallel d$ در شکل (۴ـ۳۸).

درسطح دوار استوانه‌ای‌مدارها دایره‌های متساوی (چرا ؟) ، و نصف‌النهارها خطهـای موازی محور و به‌یك فاصله از محورهستند.

سطح دوار استوانه‌ای در حقیقت سطحی استوانی است که منحنی‌هادی‌آن دایره و امتداد مولدآن برصفحهٔ دایرهٔ هادی عمود است.

۲.۱۰.۴ـاستوانهٔدوار

۱.۱۰.۴ـ تعریف ـ استوانهٔ دوار حجمی است کـه به یك سطح دوار استوانه‌ای و دو مقطع عمود برمحورآن سطح محدود باشد (شکل ۴ـ۳۹)



(شکل ۴ـ۳۹)

مقطعهای سطح استوانی را با دو صفحهٔ قاطع آن ، قاعده‌های استوانه و فاصلهٔ دوقاعده را ارتفاع استوانه می‌گوییم. در استوانهٔ دوارمولدها با ارتفاع مساویند .

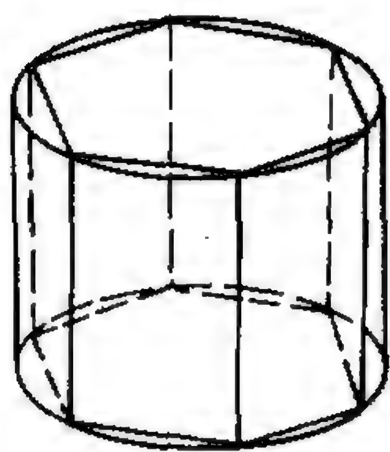
چنان‌که ذکرشد، مقطع‌هرسطح دوار با هرصفحهٔ

عمود بر محور آن یکی از مدارهای سطح و دایره‌ای شکل است. بنابر این در استوانهٔ دوار قاعده‌ها دایره و با یکدیگرمساوی هستند.

قسمتی از سطح استوانهٔ دوار محدود به دو قاعده را سطح جانبی استوانه می گوییم.

استوانهٔ دوار با اندازهٔ شعاع‌قاعده و اندازهٔ ارتفاع (مولد) آن مشخص می‌شود.

۴.۱۰.۲- مساحت جانبی ومساحت‌کل استوانه دوار- هرگاه‌چندضلعی دلخواهی درقاعده یك استوانه دوار محاط کنیم‌و آن‌چندضلعی‌را قاعده‌منشور قائمی بگیریم که‌ارتفاعش باارتفاع‌استوانه برابر باشد،مساحت جانبی این‌منشور ازمساحت جانبی‌هرمنشورقائم‌دیگری که قاعده‌اش برقاعده استوانه محیط‌است وارتفاعی برابر باارتفاع استوانه داردکوچکتراست. همانندروشی که‌برای اندازه‌گیری محیط دایره (درسال گذشته) دیدیم ، در اینجا هم می‌توان نشان دادکه درست یك عدد وجود داردکه از سطح جانبی هر منشور قائم محاط در استوانه (به‌شرح بالا) بزرگتر و از سطح جانبی هرمنشور قائم محیط بر استوانه‌کوچکتر است (شکل۴-۴۰). این عدد را بنا به تعریف سطح جانبی استوانه می‌نامیم.



(شکل۴-۴۰) (منشورمحاط‌دراستوانه)

اما سطح جانبی هرمنشور قائم برابر است با محیط قاعده ضرب‌در ارتفاع منشور و بنابراین :

مساحت جانبی استوانه برابر است با حاصل‌ضرب محیط قاعده استوانه در ارتفاع یعنی اگر R شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه قائم و s مساحت جانبی‌آن باشد:

$$s=2\pi Rh$$

در نتیجه اگر S مساحت‌کل استوانه باشد:

$$S=2\pi R(R+h)$$

۴.۱۰.۳- حجم استوانه دوار - چنانچه اصل‌کاوالیری را برای حجمهای دوار نیز بپذیریم ، می‌توانیم اندازه حجم استوانه را نیز تعیین‌کنیم. مکعب مستطیلی می‌سازیم که مساحت‌قاعده‌اش با مساحت قاعده‌استوانه وهمچنین ارتفاعش باارتفاع استوانه برابر باشد. ازاصل‌کاوالیری‌نتیجه

می‌شود که حجمهای استوانه ومکعب مستطیل دارای یك‌اندازه هستند و در نتیجه:

حجم استوانه برابر است با حاصلضرب مساحت قاعده در ارتفاع یعنی اگر h ارتفاع استوانه و R شعاع قاعده آن و V حجم آن باشد:

$$V = \pi R^2 h$$

۴.۱۵.۴ـ گسترش سطح جانبی استوانهٔ دوار ـ گسترش سطح جانبی استوانهٔ دواری که شعاع قاعدهٔ آن R و مولدش l است بر یك صفحه، مستطیلی است که یکی از ابعاد آن $2\pi R$ (محیط قاعدهٔ استوانه) و بعددیگرش l (مولد استوانه) است. این درصورتی است که سطح استوانه‌ای را در امتداد یکی از مولدهای آن بریده و آن‌گاه آن را برصفحه گسترش دهیم.

تمرین

۱ـ مساحت جانبی و مساحت کل و حجم استوانهٔ دواری را که شعاع قاعدهٔ آن ۴ و ارتفاعش ۸ سانتیمتر است حساب کنید.

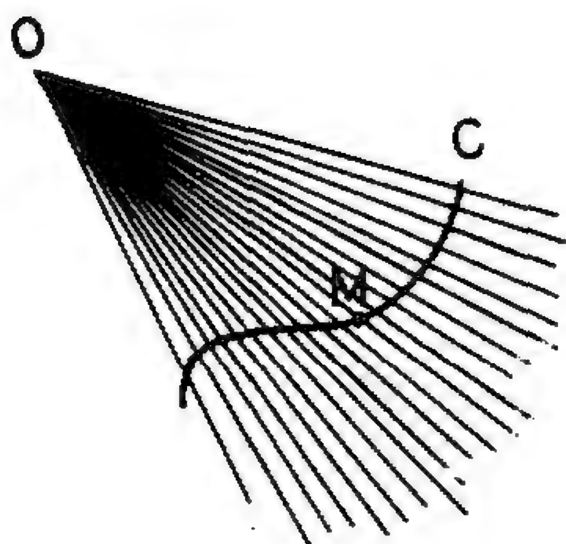
۲ـ استوانهٔ دواری برمنشور منتظم شش پهلویی محیط است؛ نسبت مساحتهای جانبی آنها را تعیین کنید.

۳ـ مستطیلی به ابعاد a و b یك‌بار گرد ضلع a و یك بار گرد ضلع b دوران می کند، از هر دوران استوانهٔ دواری پدید می‌آید. نسبت مساحتهای جانبی، همچنین نسبت حجمهای دو استوانه را حساب کنید.

۴ـ نسبت ارتفاعهای دو استوانه را که شعاع قاعدهٔ یکی دو برابر شعاع قاعدهٔ دیگری است و مساحتهای جانبی آنها مساوی هستند، تعیین کنید.

۱۱.۴ـ سطح مخروطی

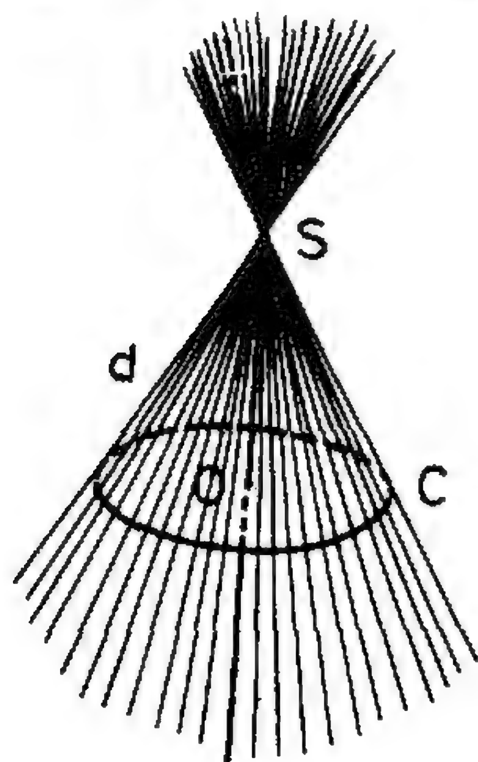
۱.۱۱.۴ـ تعریف ـ منحنی C ونقطهٔ O را در خارج آن در نظر می گیریم، مجموعهٔ نیم‌خطهای به مبدأ O که هر یك بر یك نقطهٔ M از منحنی C مرور می کند، سطحی پدید می‌آورد که آن را سطح مخروطی می‌نامیم. شکل (۴ـ۴۱).



(شکل ۴-۴۱)

در هر سطح مخروطی نقطهٔ O را رأس و منحنی C را هادی و هریک ازخطهائی راکه بر رأس و یك نقطه از هادی می‌گذرد یك مولد سطح می‌گوییم.

۲.۱۱.۴- سطح دوار مخروطی - سطح دوار مخروطی آن است که از دوران یك خط راست گرد خط راستی که با آن در یك نقطه متقاطع است پدید می‌آید. مانند سطح دوار با محور Δ و مولد d در شکل (۴-۴۲).



(شکل ۴-۴۲)

در سطح دوار مخروطی، مدارها دایره و نصف‌النهارها خطهای راست همرسند.

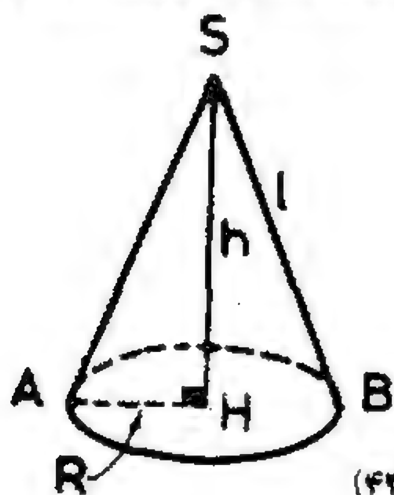
سطح دوار مخروطی در حقیقت سطحی مخروطی است که هادی آن دایره و رأسش بر عمودی واقع است که در مرکز دایرهٔ هادی بر صفحهٔ آن دایره رسم شده باشد.

۱۲.۴- مخروط دوار

۱.۱۲.۴- تعریف - مخروط حجمی است که به‌یك سطح مخروطی و صفحه‌ای که بر رأس آن نمی‌گذرد و همهٔ مولدها را در یك طرف رأس قطع می‌کند محدود باشد.

درمخروط مقطع صفحهٔ قاطع را قاعده و هرخط که یك‌نقطهٔ قاعده را به رأس وصل‌می‌کند مولد مخروط می‌نامند.

ارتفاع مخروط پاره‌خطی است محدود به رأس و صفحهٔ قاعده که برآن‌صفحه عمود باشد. مانند پاره خط SH درشکل (۴-۴۳).

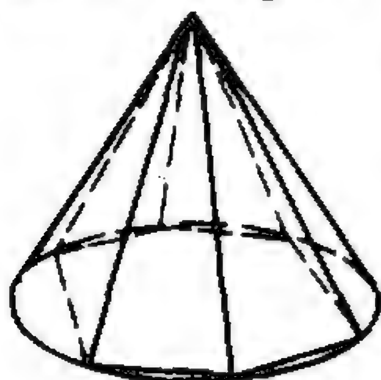


(شکل ۴-۴۳)

درحالتی که سطح مخروطی‌دوار وصفحه‌قاعده‌بر محورسطح‌دوارعمود باشد، مخروط‌را دوار می‌گوییم.

درمخروط دوارمولدها مساوی‌یکدیگرند (چرا؟) و ارتفاع مخروط بر مرکز قاعده می‌گذرد ، یعنی بر محور مخروط منطبق است.

مخروط‌دوار بااندازهٔ‌شعاع‌قاعده‌واندازه ارتفاع یا باشعاع قاعده واندازهٔ مولدودرهرحال بادوعامل‌مشخص‌می‌شود. مثلاً ممکن‌است‌یکی‌ازعوامل مشخص‌کنندهٔ مخروط دوار شعاع قاعدهٔ آن و عامل دیگرزاویه بین مولدها با صفحهٔ قاعده یا زاویهٔ بین


(شکل ۴-۴۴ الف)
(هرم‌محاط‌درمخروط)

دو مولـد که بامحورسطح در یك صفحه واقعند و به‌عنوان دو نصف‌النهار قرینه شناخته می‌شوند، مشخص گردد.

۴.۱۲.۲- مساحت جانبی و مساحت‌کل مخروط - در مورد مخروط نیزمانند استوانه، مساحت جانبی مخروط تنها عددی است که از مساحت جانبی هرهرم محاط در آن مخروط بزرگتر واز مساحت جانبی هرهرم محیط بـر آن مخروط کوچکتر است وچون مساحت جانبی هرم منتظم برابر با محیط قاعده در نصف سهم آن می‌باشد، پس:

مساحت جانبی مخروط دوار برابر است با حاصلضرب محیط قاعده در مولدآن. یعنی اگر R شعاع قاعده مخروط دوار و l مولد آن و s سطح جانبی آن باشد:

$$s = 2\pi R\frac{l}{2} = \pi Rl$$

توجه کنیدهنگامی که قاعده یك مثلث متساوی‌الساقین به‌صفر نزدیك می‌شود، اندازه ارتفاع وارد بر قاعده به اندازه ساقها نزدیك می‌شود. بنابراین سهم هرم منتظم (با کوچك شدن ضلع قاعده هرم) به‌یال هرم که همان مولد مخروط دوار محیط بر آن می‌باشد نزدیك می‌شود (شکل ۴-۴۴ الف.)

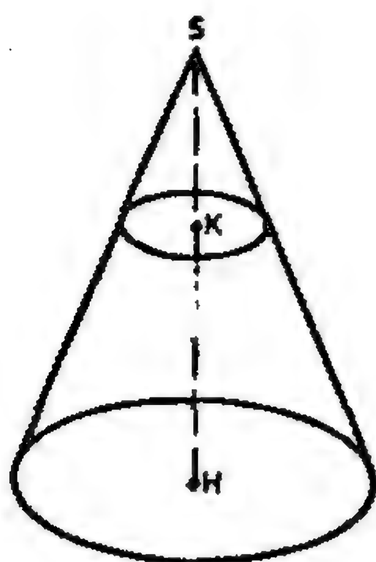
مساحت کل مخروط دوار از دستور زیر بدست می‌آید:

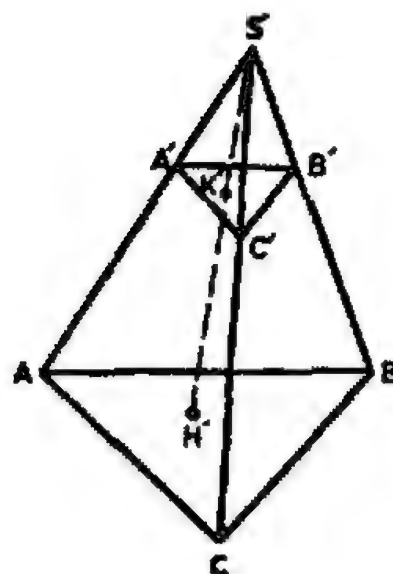
$$S = \pi R(R + l)$$

۴.۱۲.۳- حجم مخروط دوار - در مخروط هم مانند هرم می‌توان ثابت کرد که هر گاه صفحه‌ای موازی قاعده مخروط را قطع کند، نسبت مساحت مقطع به مساحت قاعده برابر است بانسبت مربع فاصله رأس مخروط ازمقطع به مربع فاصله رأس مخروط از قاعده. بنابراین با پذیرفتن اصل کاوالیری برای مخروطها، می‌توان حجم مخروط را چنین تعیین کرد: هرمی می‌سازیم که مساحت قاعده‌اش با مساحت قاعده مخروط و همچنین ارتفاعش با ارتفاع مخروط برابرباشد. آنگاه اگر قاعده‌های آنها در یك صفحه P و رأسهایشان در یك طرف P باشند، هرصفحه‌ای که آنها را قطع کندمقطعهای با مساحتهای برابر ایجاد می‌کند وبنا به اصل کاوالیری این‌دوجسم حجمهای برابر دارند و در نتیجه حجم مخروط هـم برابر با مساحت قاعده ضرب دریك‌سوم ارتفاع است. (شکل ۴-۴۵ ب)

یعنی اگر R شعاع قاعده مخروط دوار و h ارتفاع مخروط و V حجم آن باشد :

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$$





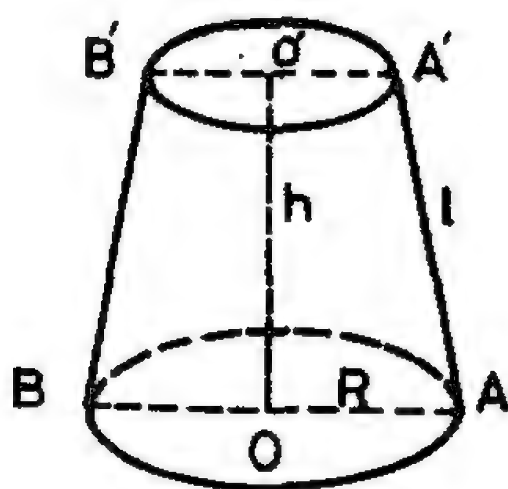
(شکل ۴-۴۵ ب)

۱۳.۴- مخروط ناقص

۱.۱۳.۴- تعریف- مخروط ناقص حجمی است که به یک‌سطح مخروطی و دو مقطع متوازی‌آن محدود باشد.

هرگاه مخروطی را صفحه‌ای موازی با صفحهٔ قاعدهٔ آن‌که بر رأس نگذرد قطع کند، به‌آن صفحه و صفحهٔ قاعده جزیی‌از مخروط محدود می‌شود که یك مخروط ناقص است.

مخروط ناقص دوارحجمی است که به‌یك سطح دوار مخروطی و دوصفحهٔ عمود برمحور آن محدود باشد (شکل ۴-۴۶).



(شکل ۴-۴۶)

در مخروط ناقص‌هریك از مقطعها را یك قاعده و فاصلهٔ دوقاعده را ارتفاع و هرپاره‌خطی راکه دوسرآن بردو نقطه از قاعده‌ها و با محورمخروط در یك صفحه باشدیك مولد ازمخروط ناقص می‌گوییم. مانند پاره‌خط AA' در (شکل ۴-۴۶).

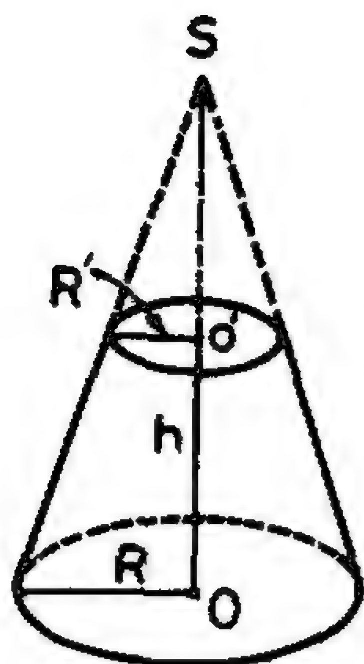
باتوجه به‌شکل (۴-۴۷) می‌توان ملاحظه کرد که اگر مخروط دواری را که شعاع قاعدهٔ آن R و ارتفاعش h_1 باشد، صفحه‌ای موازی صفحهٔ قاعده و به فاصلهٔ h از آن صفحه قطع کند، مقطع دایره‌ای است به شعاع:

$$R' = \frac{R(h_1 - h)}{h_1}$$

(چرا؟) و اندازهٔ هریك از مولدها از دستور:

$$l^2 = h^2 + (R - R')^2$$

به دست می‌آید.



(شکل ۴-۴۷)

۴-۱۳-۲- مساحت جانبی و مساحت کل و حجم مخروط ناقص - روش یافتن مساحت جانبی وحجم مخروط ناقص دوار همانند هرم ناقص منتظم می‌باشد.

اگر شعاعهای دو قاعده مخروط ناقص دوار R و R' و مولدآن l و ارتفاعش h باشد، s مساحت جانبی و S مساحت کل و V حجم مخروط ناقص از دستورهای زیر به دست می‌آیند:

$$s = \pi(R + R')l$$

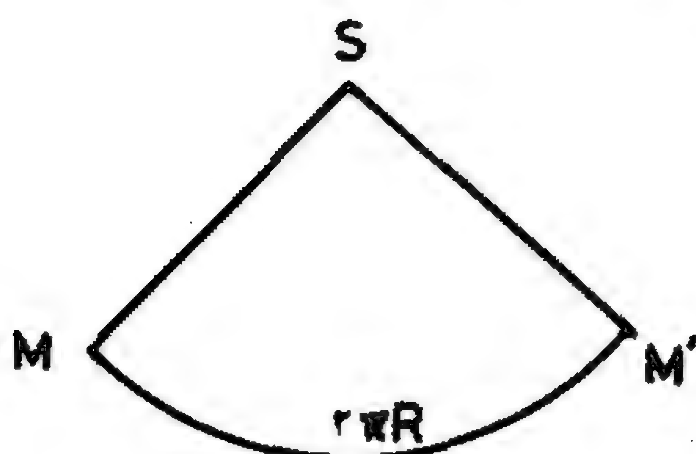
$$S = \pi(R + R')l + \pi(R^2 + R'^2)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + RR' + R'^2) \qquad (۴-۲۲)$$

توجه کنید : به‌طورکلی حجم مخروط ناقصی که دو قاعده‌اش دایره باشند، از دستور (۴-۲۲) به‌دست می‌آید، زیرا می‌توان‌آن مخروط ناقص را حد هرم ناقصی دانست که عدهٔ اضلاع دو قاعده‌اش بی‌نهایت بزرگ باشد و درنتیجهٔ دستور حجم هرم ناقص در مخروط ناقص

نیز جاری است.

۳.۱۳.۴- گسترش سطح جانبی مخروط دوار بر صفحه- اگر سطح جانبی مخروط دواری را در امتداد یکی از مولدهای آن تا رأس بریده و آن را برصفحه‌ای گسترش دهیم، گستردهٔ آن به‌صورتی که درشکل (۴-۴۸) دیده می‌شود قطاعی از یك دایره است که SM و SM' شعاعهای آن مساوی مولد مخروط و درازای کمان آن $2\pi R$ همان اندازهٔ محیط قاعدهٔ مخروط است.



(شکل ۴-۴۸)

تمرین

۱- مساحت جانبی و مساحت کل وحجم مخروط دواری راکه شعاع قاعدهٔ آن ۸ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۲ سانتیمتر است حساب کنید.

۲- مساحت جانبی ومساحت کل وحجم مخروط‌دواری راکه هر مولدآن مساوی قطرقاعده است برحسب R شعاع قاعدهٔ آن حساب کنید. زاویهٔ بین دو مولد مخروط راکه نسبت به‌محور آن قرینهٔ یکدیگرند، همچنین زاویه‌ای را که هر مولد با صفحهٔ قاعده تشکیل می‌دهد، تعیین کنید.

۳- مساحت جانبی وحجم مخروط دواری راکه شعاعهای دو قاعدهٔ آن ۸ و ۵ سانتیمترو مولد آن ۵ سانتیمتر است حساب کنید.

۴- مخروط دوار را در چه فاصله از قاعدهٔ آن با صفحه‌ای موازی قاعده باید قطع کرد تا مساحت جانبی آن با این مقطع به دو جزء متساوی تقسیم شود.

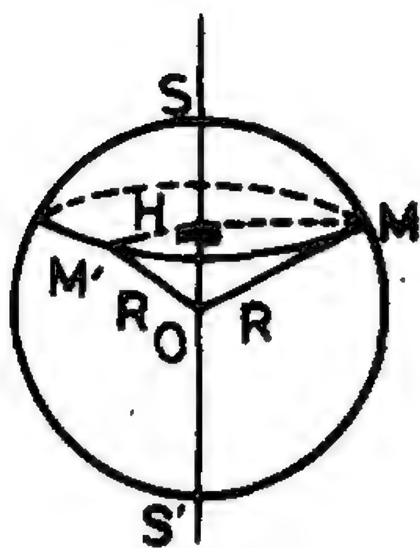
۵- مخروط دوار را در چه فاصله از قاعدهٔ آن با صفحه‌ای موازی قاعده باید قطع کرد تا حجم آن به‌دوجزء متساوی تقسیم شود.

۱۴.۴- سطح کروی

تعریف- سطح کروی سطح دواری است که از دوران یك دایره (نیمدایره) گرد قطرش پدید می‌آید (شکل ۴-۴۹).

در سطح کروی مدارها دایره‌هایی با شعاعهای مختلف و نصف‌النهارها دایره‌های مساوی با مولد سطح می‌باشند.

اگرشعاع دایرهٔ مولد سطح کروی مساوی R باشد، با توجه به آن‌که صفحهٔ دایره گرد قطر SS' دوران می‌کند و ضمن دوران MH و HM' متساوی خواهند ماند در هر وضع نقطهٔ M' از سطح کروی :



(شکل ۴-۴۹)

$$OM' = OM = R$$

خواهد بود. یعنی هر نقطهٔ سطح کروی از نقطهٔ ثابت O، مرکز دایرهٔ مولد، به فاصلهٔ ثابتی مساوی شعاع آن دایره است. بنابراین می‌توان گفت:

سطح کروی مکان هندسی نقاطی از فضاست که از نقطهٔ ثابتی به فاصلهٔ ثابت باشند.

۴-۱۵- کره

۴-۱۵-۱- تعریف - کره حجم بسته‌ای است که به یك سطح کروی محدود باشد.

کره با مرکز وشعاعش مشخص می‌شود. کرهٔ بـه مرکز O و شعاع R را با نماد $S(O,R)$ نمایش‌می‌دهیم و آن را «کرهٔ S به مرکز O و شعاع R» می‌خوانیم.

سطح کروی را با نمادها به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم.

$$S(O,R) = \{M | OM = R\}$$

سطح کروی مجموعهٔ نقاط فضا را به سه زیرمجموعه به‌شرح زیر تقسیم می‌کند:

۱- مجموعهٔ نقاطی‌که فاصلهٔ آنها از مرکزمساوی شعاع سطح‌کروی است. این مجموعه همان سطح دوار کروی را پدیدمی‌آورد.

۲- مجموعهٔ‌نقاطی که‌فاصلهٔ آنها ازمرکزکوچکترازشعاع است ودرون‌کره نامیده می‌شود.

۳- مجموعهٔ نقاطی‌که فاصلهٔ آنها از مرکز بزرگتر از شعاع است و آن را بـرون‌کره می‌گوییم.

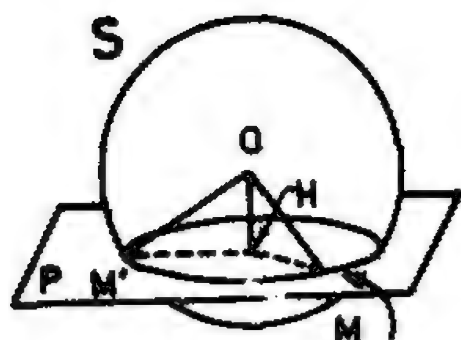
قطرکره - پاره خطی را کـه دوسر آن دو نقطه از یك سطح کروی باشند، وتـر کـره می‌گوییم.

قطرکره وتری است‌که برمرکز آن بگذرد. قطرکره بزرگترین وترهای آن‌است. اندازهٔ هرقطرکره دو برابر شعاع‌کره است.

۴-۱۵-۲- مقطع‌کره با صفحه - صفحهٔ P و کرهٔ $S(O,R)$ را درنظر می‌گیریم، اگر OH فاصلهٔ مرکزکـره از صفحهٔ P باشد، برحسب آن‌که این فاصله‌کوچکتر از شعاع کـره، یا

مساوی با آن ، یا بزرگتر از شعاع باشد ، نقطهٔ H در درون کره ، برسطح کره ، یا در برون آن است.

درصورتی که نقطهٔ H در درون کره باشد (شکل ۴ـ۵۰)، با توجه به آن که صفحه بی کران است ، نقاطی از صفحهٔ P در برون کره نیز وجود دارند و بنابراین باید صفحه و سطح کروی نقاط مشترکی داشته باشند ، اگر نقاط M و M' بین صفحهٔ P و سطح کروی مشترک باشند ، از تساوی دومثلث OHM و OHM'

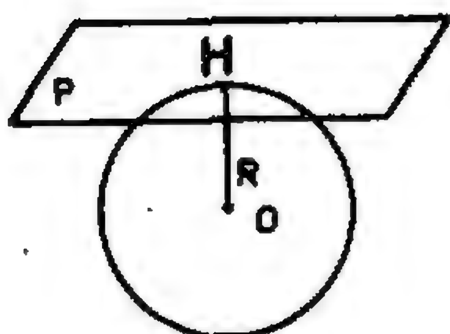


(شکل ۴ـ۵۰)

(چرا متساویند ؟) نتیجه می‌شود که $HM = HM'$ یعنی نقاط فصل مشترك از نقطهٔ ثابت H از صفحهٔ P به یك فاصله‌اند ، پس مقطع کره با هرصفحهٔ P یك دایره است.

با توجه به این که از دوران دایره گرد هرقطر دلخواه آن سطح کروی پدید می‌آید و هر صفحه را صفحه‌ای عمود بر امتداد یك قطر از سطح کروی می‌توان درنظر گرفت، مقطع کره را با هرصفحه می‌توان یکی از مدارهای سطح کروی دانست و بنابراین یك دایره است.

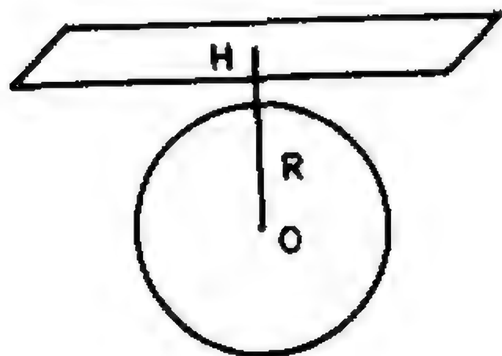
بزرگترین مقطع سطح کروی با صفحه ، مقطعی است که صفحهٔ آن از مرکز کره بگذرد. این مقطع دایره‌ای است که مرکز آن مرکز کره و شعاع آن با شعاع کره مساوی است و آنرا دایرهٔ بزرگ یا دایرهٔ عظمیهٔ کره می‌نامیم.



(شکل ۴ـ۵۱)

اگر نقطهٔ H برسطح کروی واقع باشد ، با ملاحظهٔ آن که دیگر نقاط صفحهٔ P ناچار در برون کره‌اند ، صفحهٔ P با سطح کروی تنها در نقطهٔ H مشترك است و در این‌صورت آن را صفحهٔ مماس برسطح کروی گوییم ، (شکل ۴ـ۵۱) .

در حالتی که نقطه H و درنتیجه همهٔ نقاط صفحهٔ P در برون سطح کروی هستند ، صفحهٔ P با سطح کروی نقطه مشترك ندارد ، به بیان دیگر ، سطح کروی را قطع نمی‌کند ، (شکل ۴ـ۵۲) .



(شکل ۴ـ۵۲)

۴.۱۵.۳ـ مساحت و حجم کره ـ مساحت و حجم کره را به راههای مختلف محاسبه کرده‌اند.

از نظر هندسی نیز ضمن قضیه‌هایی ثابت می‌شود که:

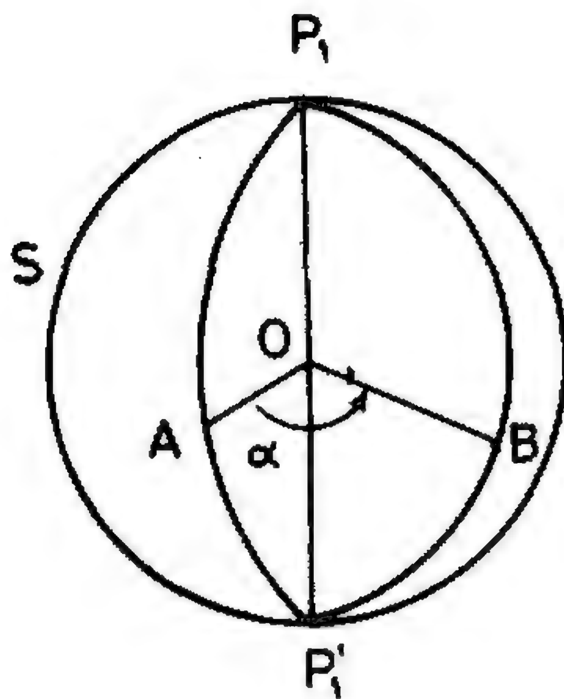
مساحت کره برابر است با چهار برابر مساحت دایره‌ای که شعاع آن با شعاع کره مساوی باشد.

حجم کره برابر است با مساحت کره در ثلث اندازهٔ شعاع آن.

با این ترتیب مساحت و حجم کرهٔ به‌شعاع R از دستورهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$S=4\pi R^2$$

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$



(شکل ۴-۵۳)

۴.۱۵.۴- قاچ کروی - هرگاه قطری مانند $P_1P'_1$ از کرهٔ S را در نظر بگیریم و دو نیم‌صفحهٔ P و P' را بر آن مرور دهیم، هریك از دو نیم‌صفحه، سطح کروی را در نیمدایره‌ای (دو نصف‌النهار سطح کروی) قطع می‌کند، (شکل ۴-۵۳). قسمتی از سطح کروی را که به این دو نیم‌دایرهٔ محدودند، یك قاچ کروی می‌نامیم. یعنی:

قاچ کروی قسمتی از یك سطح کروی است که به دو نیمدایرهٔ بزرگ سطح کروی محدود باشد.

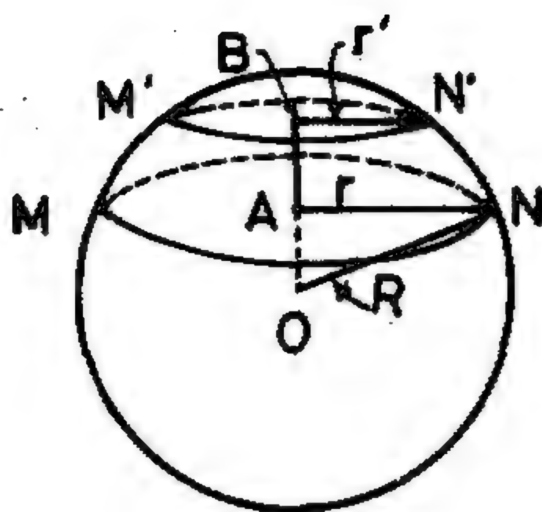
هرقاچ کروی با اندازهٔ فرجهٔ بین دو نیم‌صفحهٔ P و P' مشخص می‌شود. سطح کروی خود قاچی است که زاویهٔ مسطحهٔ آن °۳۶۰ است.

از آنچه ذکر شد می‌توان نتیجه گرفت که اگر زاویهٔ مسطحهٔ یك قاچ کروی از کره‌ای به شعاع R مساوی $\alpha°$ باشد، مساحت قاچ را از دستور زیر می‌توان به‌دست آورد.

$$s=\frac{4\pi R^2\alpha}{360}$$

۵.۱۵.۴- منطقه و قطعهٔ کروی - هرگاه دو صفحهٔ متوازی سطح کروی را قطع کنند. قسمتی از آن سطح به دو مقطع محدود می‌شود که آن را **منطقهٔ کروی** می‌گوییم. و نیز قسمتی از حجم کره را که به دو مقطع موازی آن محدود باشد، **قطعهٔ کروی** می‌نامیم، (شکل ۴-۵۴).

در هر منطقهٔ کروی و همچنین در هر قطعهٔ کروی هریك از دومقطع موازی را یك قاعده و فاصلهٔ دو قاعده را ارتفاع منطقه و قطعه می‌نامیم.



(شکل ۴-۵۴)

ثابت می‌شود که:

مساحت منطقهٔ کروی مساوی است با حاصل‌ضرب محیط دایرهٔ بزرگ کره در ارتفاع منطقه.

یعنی در کرهٔ به شعاع R مساحت منطقه به ارتفاع h از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{مساحت منطقه} \quad s = 2\pi Rh$$

حجم قطعهٔ کروی مساوی است با حجم کره‌ای که قطرآن ارتفاع قطعه باشد به‌علاوه حجم استوانه‌ای که مساحت قاعدهٔ آن نصف مجموع مساحتهای دو قاعدهٔ قطعه و ارتفاعش مساوی ارتفاع قطعه باشد.

یعنی در کره‌ای به‌شعاع R، حجم قطعه‌ای که دوقاعدهٔ آن به‌شعاعهای r و r' و ارتفاع آن h باشد، ازدستور زیر بدست می‌آید.

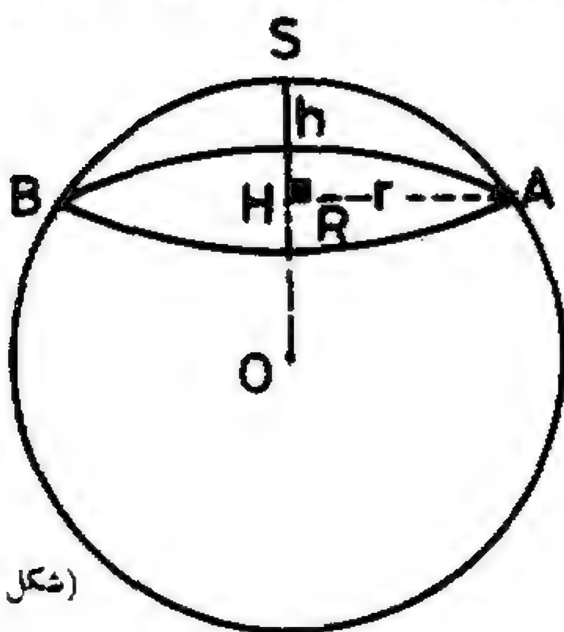
$$V = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{1}{2}\pi h(r^2 + r'^2)$$

اگر صفحهٔ یکی از قاعده‌های قطعه برکره مماس باشد، شعاع این قاعده، مثلا r'، صفر می‌شود، شکل ۴-۵۴، و دستور حجم قطعه در این حالت به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)$$

۴-۱۵-۶- عرقچین کروی- قسمتی از سطح کروی که با یك مقطع ازآن سطح تفکیك شده باشد، یك عرقچین کروی است.

در هر عرقچین کروی مقطع صفحهٔ قاطع با سطح کروی را قاعده عرقچین و پاره‌خطی را که از مرکز کره برصفحهٔ قاعده عمود و بین قاعده وسطح کره محصوراست ارتفاع عرقچین می‌گوییم. مانند پاره خط SH در شکل (۴-۵۵).

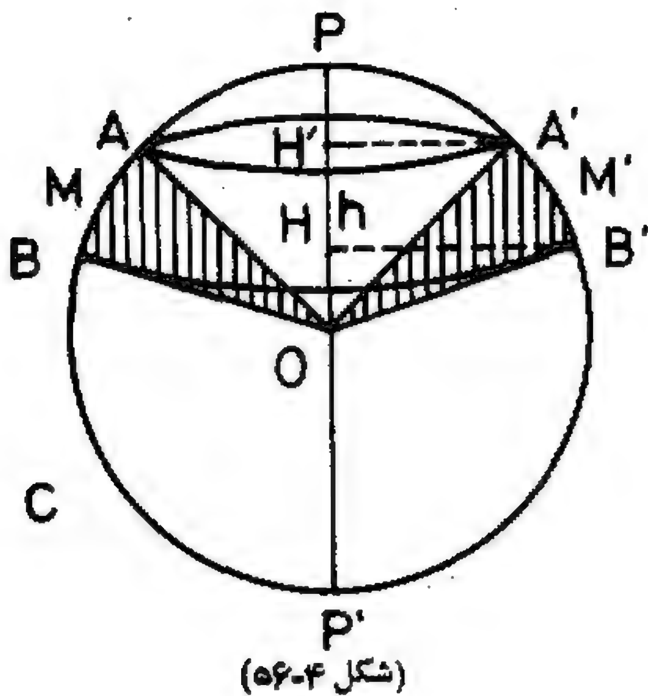


(شکل ۴-۵۵)

سطح نیمکره عرقچینی است که ارتفاع آن مساوی شعاع کره است.

مساحت عرقچین کروی با استفاده ازدستور مربوط به مساحت منطقه به‌دست می‌آید.

۷.۱۵.۴- قطاع کروی - دایرهٔ C و قطر $P'P$ و قطاع دایرهٔ $OAMB$ از آن را در نظر می‌گیریم، شکل (۴-۵۶)، اگر دایرهٔ C گرد قطر PP' دوران کند، کرهٔ به‌شعاع R پدید می‌آید و از دوران قطاع دایرهٔ $OAMB$ قسمتی از حجم کره مشخص می‌شودکه آن را قطاع کروی می‌گوییم. سطح حادث از دوران کمان AMB را که خود یك منطقهٔ کروی مشخص می‌کند، قاعدهٔ قطاع کروی وارتفاع این منطقه را ارتفاع قطاع کروی می‌گوییم.



(شکل ۴-۵۶)

قطاع کروی درحقیقت قسمتی از حجم کره است که بین سطح یك منطقهٔ کروی و سطوح جانبی دو مخروط که قاعده‌های آنها دو قاعدهٔ منطقه و رأس هر دو مرکز کره است، محدود می‌شود.

هر قطاع کروی با شعاعهای دو قاعده و ارتفاعش مشخص می‌شود.

با استفاده از آنچه در بارهٔ حجم قطعهٔ کروی ذکر شد، می‌توان دیدکه حجم قطاع کروی با ارتفاع h درکره‌ای به شعاع R از دستور:

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 h$$

به‌دست می‌آید.

تمرین

۱- سطح وحجم کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را حساب کنید.

۲- مکان هندسی نقاطی از یك سطح کروی را تعیین کنیدکه از دو نقطهٔ مفروض A و B واقع برسطح کره به یك فاصله باشند.

۳- نقاطی ازیك سطح کروی مشخص کنیدکه هریك از آنها از سه نقطهٔ مفروض واقع بر سطح کره به یك فاصله باشند.

۴- درکره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر مساحت قاچ کروی را که زاویهٔ مسطحهٔ آن 24°

است حساب کنید.

۵- درکره‌ای به‌شعاع ۱۳ سانتیمتر منطقه‌ای‌کروی چنان درنظر بگیرید که ارتفاعش ۱۱ سانتیمتر باشد، مساحت این منطقه را حساب کنید.

۶- مساحت عرقچینی از یک کرهٔ به‌شعاع ۱۵ سانتیمتر را که ارتفاع آن ۶ سانتیمتر است حساب کنید.

۴ خواندنی

ابوریحان بیرونی

ابوریحان محمد بیرونی از نام آورترین دانشمندان و متفکران سرزمین ایران است. و در شرق و غرب آثار و نوشته‌های او هنوز از اعتبار قابل ملاحظه بهره دارد.

در سال ۱۳۵۲، به‌مناسبت هزارهٔ ولادت او در ایران وجهان از وی تجلیل شد و کتابها و رساله‌های متعدد در بارهٔ او به‌چاپ رسید.

از این مرد بزرگ آثار علمی و ادبی بسیار به‌جای مانده است.[۱] کتابهای ابوریحان بیشتر به‌زبان علمی زمان وی یعنی به‌زبان عربی نوشته شده‌اند اما تسلط او به‌هر دو زبان فارسی و عربی در حدی بود که در هر دو زبان آثار فنا ناپذیر به‌جای گذاشت.

یکی از با ارج‌ترین کتابهای ابوریحان بیرونی کتاب التفهیم است که‌نام کامل آن «التّفهیم لِأوایل الصّناعة التنجیم» است که به دو زبان فارسی وعربی نوشته شده است و از هردو نظرعلمی و ادبی از مهمترین کتابهای مُدوّن دورهٔ اسلامی است.

ابوریحان کتاب التفهیم را در سال ۴۰۸، بـه‌خواهش ریحانه دختر حسین (حسن) خوارزمی در شهر غزنه تألیف کرد. وی کتاب را به‌شیوهٔ «مدخل»، یعنی روشی که در خور فهم مبتدیان باشد، نوشته است. کتاب مشتمل است برهندسه وحساب وهیئت و اسطرلاب وعلم احکام نجوم و شاهکاری است ازعلم و ادب که برای پی‌بردن به‌اصطلاحات علمی آن زمـان از منابع بسیار غنی به‌شمار می‌آید.

لغات واصطلاحاتی که ابوریحان دراین کتاب به‌کاربرده است آن چنان خوب انتخاب شده‌اند که پس‌از هزار سال هنوز قابل استفاده هستند و ممکن است به‌عنوان لغات موردپسند عامه ازآنها استفاده کرد.

به‌عنوان نمونه‌ای ازنثر فارسی کتاب التفهیم قسمتهایـی از آن را دراین مقالـه نقل می‌کنیم:

«هندسه چیست؟ دانستن اندازه‌ها وچندی یك از دیگر و خاصیت صورتها و شکلها که

اندر چشم موجود است و علم عدد بدو یکی گردد از پس یك که جزوی بود و علـم صورت عالم حقیقت گردد از پس آنك به تخمین و گمان بود.»

«جسم چه چیز است؟ آن چیزاست که یافته شود به‌بودن و قائم بود به‌تـن خویش و جایگاه خویش پر کرده دارد و چیز دیگر از آنك ماننده او بود بـا وی اندر جایگاه وی نتواند بودن.»

«سطح چیست؟ جسم ناچاره بی‌نهایت نبود به‌همه سوها و نهـایت او سطح است... و نیز او را بسیطْ گویند.»

«خط چیست؟ اگر بسیط را نهایتی باشد، آن نهایت او ناچاره خطی باشد و آن خط طول باشد بی‌عرض و به‌بعد یکی کمتر باشد ازبعدهای سطح چنانك بعدهای سطح یکی کمتر باشد از بعدهای جسم.»

«نقطه چیست؟ چون خط را نهایت باشد، نهایت او نقطه بـود و نقطه کمتر از خط باشد به‌یك بعد و خط را جزطول نیست و بدانك نقطه را نه‌طول است و نه عرض و نه‌عمق.»

«سطح راست کوتاهترین سطح است اندر میان دو خط که نهایت اواند و خط راست کوتاهترین خط است میان دو نقطه که نهایت اویند.»

تولد ابوریحان بیرونی را در سال ۳۵۱ در بیرون خوارزم ودرگذشت‌وی را به‌سال ۴۲۷ هجری در غزنه نوشته‌اند.

مسائل متفرقه

۱- برصفحهٔ دایرهٔ $C(O,R)$ نقطهٔ P را به فاصلهٔ $\frac{R}{۴}$ و نقطهٔ M را به‌فاصلهٔ ۳R از مرکز دایره اختیارمی‌کنیم. قدرمطلق قوت هریك از این دونقطه را نسبت به‌دایره تعیین کنید. اندازهٔ مماسی راکه ازنقطهٔ M بردایره می‌توان رسم کرد حساب کنید.

۲- دایره $C(O,R)$ ونقطهٔ P دربرون دایره مفروضند، از نقطهٔ P قاطعی رسم کنیدکه دایره را درنقاط A و B قطع کند و وتر AB واسطهٔ هندسی بین PA و PB باشد. آیا مسئله همیشه جواب دارد؟ مجموعهٔ نقاط P را چنان تعیین کنیدکه مسئله جواب داشته باشد.

۳- نقطهٔ دلخواه D را بر قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC اختیار می‌کنیم و خط AD راامتداد می‌دهیم تادایرهٔ محیطی‌مثلث را درنقطهٔ E قطع کند، ثابت‌کنید ضلع AC ازمثلث بردایره‌ای‌که برسه نقطهٔ C و D و E می‌گذرد مماس است.

۴- دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C(O',\frac{R}{۲})$ در نقطهٔ A مماس درونیند. وتر BC از دایرهٔ O درنقطهٔ M بر دایرهٔ O' مماس‌است. ثابت‌کنید اندازهٔ AM واسطهٔ هندسی بین اندازه‌های MB و MC است. نقطهٔ M را در چه وضعی باید درنظر گرفت تا مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه باشد.

۵- درمثلثی بین اندازه‌های اضلاع رابطه‌های :

$$b^۲+ac=a^۲+c^۲ \quad و \quad b\sqrt{۲}=c\sqrt{۳}$$

برقرارند. زاویه‌های مثلث واندازه‌های دوضلع b و c را برحسب a، تعیین‌کنید.

۶- درمثلث ABC زاویهٔ A قائمه است. میانه‌های نظیر دوضلع AC و AB را رسم می‌کنیم تاخطی راکه از رأس A موازی ضلع BC رسم می‌شود به‌ترتیب درنقاط D و E قطع کنند، ثابت‌کنید:

$$BD^۲+CE^۲=۵BC^۲$$

۷- برنیمدایره‌ای به قطر $AB=۲R$ نقاط C و D را اختیارکرده و از دو نقطهٔ A و B دو عمود بر امتداد خط CD فرود می‌آوریم تا این خط را در نقاط E و F قطع‌کنند، ثابت‌کنید :

$$CE^۲+CF^۲=DE^۲+DF^۲$$

۸ - اندازه‌های قاعده و یك ساق مثلث متساوی الساقینی به‌ترتیب ۱۰ و ۱۳ سانتیمترند.

میانه‌ها را حساب کنید.

۹ـ برقطر AB از دایره $C(O,R)$ و یا بر امتداد قطر، دو نقطه ثابت M و N را به یك فاصله از مرکز اختیار می‌کنیم. ثابت کنید مجموع مربعهای فاصله‌های هرنقطه دلخواه P روی دایره از نقطه‌های A و B مقدار ثابتی است. نقطه‌های M و N را چنان درنظر بگیرید که این مقدار ثابت مساوی $6R^2$ باشد. در این حالت اگرنقطه P را چنان اختیار کنیم که خط NP بردایره مماس باشد، پاره خطهای NP و MP را حساب کنید.

۱۰ـ شعاع دایرهٔ محیطی و میانه و ارتفاع نظیر یك ضلع از مثلثی معلومند. مثلث را رسم کنید. اگر در این مثلث $R=25$ و $h_a=36$ و $m_a=39$ سانتیمتر باشند، اضلاع مثلث‌را حساب کنید.

۱۱ـ شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث قائم الزاویه‌ای را برحسب اضلاع آن تعیین کنید.

۱۲ـ مربعی رسم کنید که چهار رأس آن بر دو دایرهٔ هم مرکز واقع باشند.

۱۳ـ ثابت کنید قرینهٔ نقطهٔ همرسی ارتفاعهای هرمثلث نسبت به هرضلع آن، بردایرهٔ محیطی مثلث واقع است.

۱۴ـ دریك نیمدایره مربعی محاط کنید که یك ضلع آن برقطر نیمدایره و دو رأس دیگر آن برنیمدایره واقع باشند.

۱۵ـ اگر نقطه‌ای مانند M برضلع BC از مثلث ABC واقع باشد، بین فاصله‌های آن نقطه از سه رأس مثلث و اندازه‌های اضلاع رابطه زیر برقرار است:

$$b^2 \cdot MB + c^2 \cdot MC = aMA^2 + aMB \cdot MC$$

۱۶ـ مثلث ABC دردایرهٔ $C(O,R)$ محاط شده است قطری از دایره را که بر AB عمود است رسم کرده آنرا از طرفین امتداد می‌دهیم تا محیط دایره را درنقاط M و N وضلع BC را در P وامتداد AC را در Q قطع کند ثابت کنید چهارنقطهٔ N و M و Q و P تشکیل یك تقسیم توافقی می‌دهند.

۱۷ـ ذوزنقه $ABCD$ داده شده است ساقها را امتداد می‌دهیم تا یکدیگـر را در M قطع کنند، از نقطه M به N محل تلاقی دوقطر ذوزنقه وصل کرده ادامه می‌دهیم هرگاه MN قاعدهٔ AB را در Q و BC را در P قطع کند ثابت کنید چهارنقطه M و N و P و Q تشکیل یك تقسیم توافقی می‌دهند.

۱۸ـ هرگاه نقطهٔ O محل تلاقی اقطار مربع $ABCD$ باشد ثابت کنید:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O}$$

۱۹ـ اگر O مرکز دایرهٔ محیطی پنج‌ضلعی $ABCDE$ باشد ثابت کنید:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{O}$$

۲۰ـ ثابت کنید ترکیب دو تقارن مرکزی یك انتقال است.

۲۱ـ ثابت کنید ترکیب سه تقارن مرکزی متمایز یك تقارن مرکزی است.

۲۲ـ ثابت کنید مجموع سه بردار $\overrightarrow{V_1}$ ، $\overrightarrow{V_2}$ و $\overrightarrow{V_3}$ قطر متوازی‌السطوحی است که برآن سه بردار بنا می‌شود.

۲۳ـ زاویه xOy ونقطهٔ A در داخل آن داده شده است از نقطهٔ A قاطعی رسم کنید که دو ضلع زاویه را در C و B قطع کند به‌طوری‌که $OC=OB$.

۲۴ـ قرینه‌های سه رأس مثلث ABC را نسبت به‌نقطهٔ O محل برخورد سه میانه مثلث به‌دست‌آورده‌آنها را متناظر با A، B، C به ترتیب A' ، B' و C' می‌نامیم چرا میانه‌های مثلث $A'B'C'$ با میانه‌های مثلث ABC برابرند؟

۲۵ـ دونقطهٔ A و B دریك طرف خط $X'X$ قراردارند روی خط $X'X$ نقطه‌ای مانند M را چنان انتخاب کنید‌که خطوط AM و BM باخط $X'X$ زوایای مساوی تشکیل دهند یعنی داشته باشیم $\widehat{AMX}=\widehat{BMX'}$

۲۶ـ مکعبی درنظر می‌گیریم که اندازهٔ هریال آن a است. در مرکز هر وجه عمودی به طول $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ بروجه اخراج کرده وصفحه‌هایی در نظرمی گیریم که هریك ازآنها بریك یال‌مکعب و بریکی از نقاط منتهی‌الیه پاره‌خطهای مزبور بگذرد. حجم حاصل چند وجهی‌است و هر وجه آن چه‌شکلی دارد ؟

۲۷ـ قطرمکعب مستطیلی l و دو یال از آن به اندازه‌های a و b به‌صورت پاره‌خطهایی داده شده‌اند ، یال سوم مکعب مستطیل را رسم کنید .

۲۸ـ حجم و مساحت جانبی و مساحت کل هرم منتظمی راکه قاعدهٔ‌آن ۶ ضلعی به‌ضلع ۴ و ارتفاع‌آن ۳ سانتیمتر است حساب‌کنید. درچه فاصله از رأس این هرم صفحه‌ای موازی‌قاعدهٔ آن بایدمرور داد تا حجم هرمی که بین‌رأس وآن صفحه پدیدمی‌آید $\frac{1}{8}$ حجم هرم باشد؟

۲۹ـ تحقیق‌کنید در هرمی به‌ارتفاع hو مساحت قاعدهٔ S به چه فاصله از رأس‌صفحه‌ای موازی قاعده باید در نظرگرفت تا حجم هرم ناقص حاصل نصف حجم هرم باشد.

۳۰ـ مربعی‌به‌ضلع ۴سانتیمتر گردیکی از قطرهایش دوران می‌کند، مساحت‌کل و حجم جسم حاصل را حساب‌کنید.

۳۱ـ حجم مخروط دواری سه برابر حجم‌مخروط دوار دیگری است‌که ارتفاع آن ثلث

ارتفاع مخروط اول است، نسبت شعاعهای آنها را تعیین کنید.

۳۲- در مخروط ناقص دواری که شعاعهای دو قاعدهٔ آن r و ۴r هستند صفحه‌ای موازی قاعده و بـه فاصلهٔ $\frac{1}{4}$ ارتفاع و نزدیك به قاعدهٔ کوچك مرورمی‌دهیم تا درمخروط مقطعی ایجاد کند ، مساحت مقطع مزبور را تعیین کنید، در حالت خاص که ارتفاع مخروط ناقص ۴r باشد، حجم هریك از دو جزء مخروط ناقص راکه وسیلهٔ مقطع مزبورتفکیك می‌شوند تعیین کنید.

۳۳- کره‌ای در چهار وجهی منتظمی که اندازهٔ هریال آن a است محاط است، حجم آن‌را برحسب a حساب کنید.

۳۴- ثابت کنید هرچهار وجهی قابل محاط شدن در یك کره است وقابل‌محیط شدن برکرهٔ دیگر است.

۳۵- با استفاده از اصل کاوالیری وشکلهای زیـر دستور :

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

را برای حجم کره بدست آورید:

